EffeDiX 2012 (ver. 3.0) – Attività

(Per scaricare il programma: cercare su Google “download EffeDiX”)

Primo incontro

Attività 1 Discutere graficamente l’equazione letterale

$$kx^2 + x + k = 0$$

<u>*Come procedere*</u>

Tracciare il grafico della funzione $kx^2 + x + k$, dichiarando il parametro k (prendere per il parametro k l’intervallo da -1 a 1, ma considerare se facendo variare k in questo intervallo si ottengono tutte le situazioni significative …).
Rappresentare il valore del parametro k sull’asse delle x, tracciando il punto (k, 0) con relativa etichetta.
Tenendo presente che il delta dell’equazione è $\Delta(k)=1-4k^2$, rappresentare il valore del delta sull’asse delle x, tracciando il punto $(1-4k^2, 0)$ con relativa etichetta.
Tracciare il grafico della funzione è $\Delta(x)=1-4x^2$: il delta è non negativo per valori di k compresi tra -1/2 e 1/2.
Rappresentare le soluzioni $x_1=\frac{-1+\sqrt{1-4k^2}}{2k}$ e $x_2=\frac{-1-\sqrt{1-4k^2}}{2k}$ sull’asse delle x.
Trascinando il cursore relativo al parametro k, discutere l’equazione.

Attività 2 Determinare graficamente le rette del fascio per il punto P(1; -1) tangenti alla parabola di equazione $y=x^2+x+1$. Rappresentare in modo dinamico la situazione. Creare delle opportune immagini statiche (pulsante miniature) per documentare la soluzione.

<u>*Come procedere*</u>

Tracciare il punto P (1; -1) con relativa etichetta.
Tracciare la parabola di equazione $y=x^2+x+1$.
Tracciare la retta per P di pendenza m (fascio per P, esclusa la verticale), dichiarando il parametro m con una opportuna escursione (ad es. tra -2 e 8 con 100 intervalli).
Verificare che esistono due rette tangenti (due valori di m).

Inoltre, poiché il delta dell’equazione risolvente

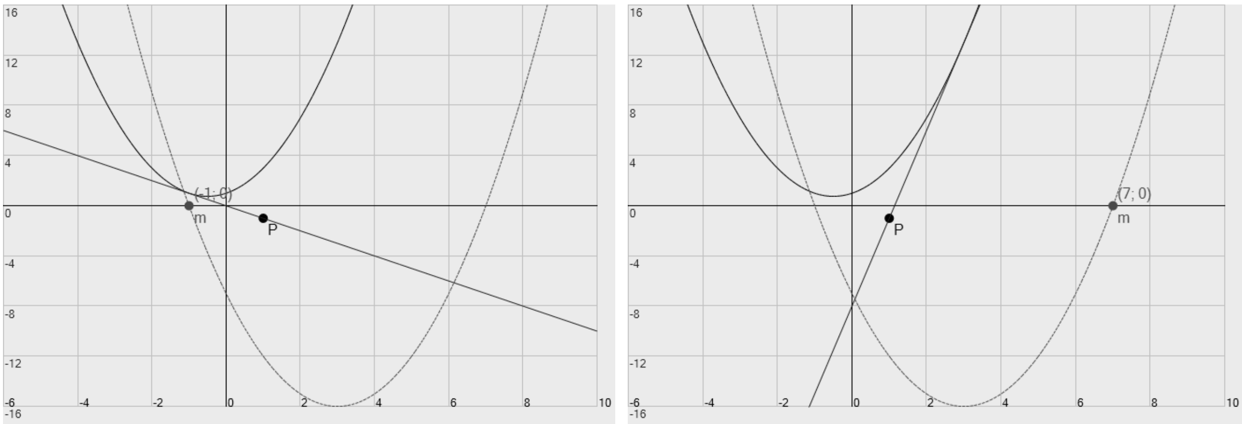
$$x^2+x+1 = m(x-1)-1$$

è

$$\Delta(m) = m^2-6m-7,$$

tracciare il grafico di $\Delta(x) = x^2-6x-7$ e il punto dinamico Q (m, 0). Verificare che si hanno le situazioni di tangenza quando Q coincide con gli zeri di $\Delta(m)$ cioè -1 e 7.

Infine utilizzare i pulsanti di scorrimento, selezionando le rette tangenti (inserite come grafici di funzione).



Attività 3 Tracciare il grafico della funzione polinomiale

$$p(x) = x^3+x^2+3x-1$$

e verificare che ha un solo zero reale. Approssimare lo zero con 4 cifre decimali esatte utilizzando l'opzione di zoom locale. Approssimare lo zero con 2 cifre decimali esatte costruendo delle tabelle x, p(x) e applicando il metodo di bisezione.

Nota

Con il metodo di bisezione occorrono 8 passi per ottenere l'approssimazione cercata partendo dall'intervallo [0, 1]. All'ottavo passo l'ampiezza dell'intervallo è $1/2^8$.
Per approssimare lo zero di p(x) si può utilizzare il più efficiente metodo di Newton ("delle tangenti"). Si procede così. Considerare un punto iniziale x_0 (non troppo lontano dallo zero, ad es. nel nostro caso $x_0=1$) e la funzione

$$g(x)=x-p(x)/p'(x)$$

che nel nostro caso è $g(x)=(2x^3+x^2+1)/(3x^2+2x+3)$; considerare poi l'orbita di x_0 sotto l'azione di g, cioè i punti

$$x_0, g(x_0), g(g(x_0)), g(g(g(x_0))), \ldots$$

L'orbita converge molto rapidamente allo zero di p(x). Per ottenere l'orbita di x_0 *utilizzare l'opzione* ***Orbita discreta 1D*** *di EffeDiX e la relativa tabella. Si può anche verificare dinamicamente, parametrizzando il punto iniziale* x_0*, che lo zero di p(x) è un punto fisso attrattore (cioè tutte le orbite che nascono in un intorno dello zero convergono allo zero).*

Attività 4 Considerare i seguenti dati

x	0,6	0,95	1,3	2,6	3,35	4,12
y	1	2,35	2	3,7	2,9	3,15

Determinare la retta di regressione e valutare l'adeguatezza del modello lineare tenendo conto del coefficiente di correlazione. Rappresentare con EffeDiX gli scarti e il quadrato degli scarti. Verificare inoltre che il baricentro dei punti appartiene alla retta di regressione.

Attività 5 Generare i primi venti termini della successione di Fibonacci e valutare quale tra i seguenti modelli di regressione sia il più adatto: lineare, quadratico, cubico, logaritmico, funzione potenza, esponenziale.

Secondo incontro

Attività 1 Determinare in modo approssimato la derivata della funzione f(x) = sin(x) in un punto x. Mostrare in modo dinamico il significato intuitivo di derivata come pendenza di una curva in un punto. Tracciare in modo approssimato la funzione derivata f′(x).

<u>*Come procedere*</u>

Impostazione piano: intervallo sull’asse delle x tra -1 e 7 (8 intervalli).
Tracciare il grafico della funzione sinx.
Dichiarare il parametro t (variabile tra -1 e 7 con 80 intervalli).
Tracciare il punto (t, 0) con relativa etichetta t.
Tracciare il punto (t, sint).
Tracciare il segmento di estremi (t,0) e (t, sint)
Dichiarare il parametro h (variabile tra -1 e 1 con 200 intervalli).
Tracciare il punto (t+h, 0) con relativa etichetta t+h.
Tracciare il punto (t+h, sin(t+h)).
Tracciare il segmento di estremi (t+h, 0) e (t+h, sin(t+h)).
Tracciare la retta per i punti (t, sint) e (t+h, sin(t+h)).
Rappresentare il valore (sin(x+h)-sinx)/h sull’asse delle y (tracciare punto e coordinate); tale valore, quando h tende a zero, è la pendenza della curva in x (la derivata di sinx in x)
Tracciare il grafico della funzione (sin(x+h)-sinx)/h; tale funzione tende a cosx quando h tende a zero.

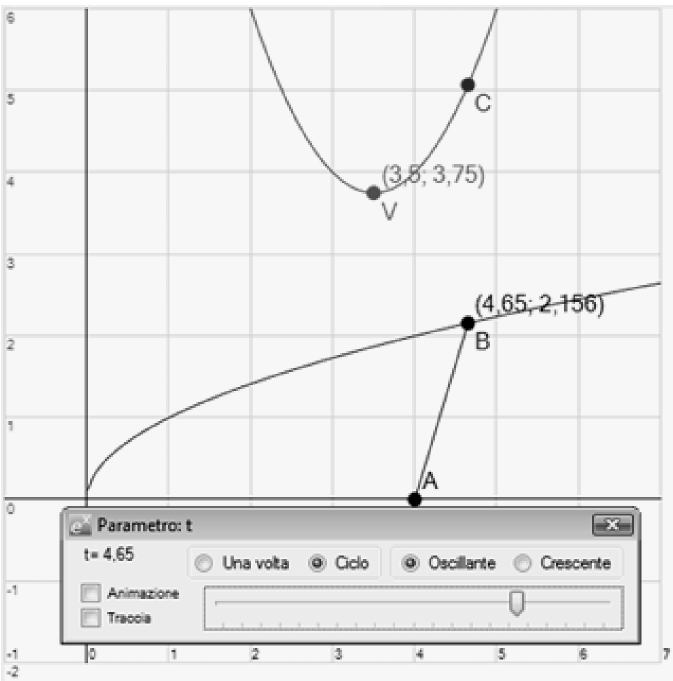
<u>Nota</u> *Applicare lo stesso procedimento ad una funzione non derivabile in alcuni punti, ad esempio abs(sinx).*

Attività 2 Studiare il grafico della funzione $\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}$ (max rel. 4/3, min. rel. 2, asintoto obliquo y=x-5/3, tangente verticale in x=1, cuspide in x=2).

Attività 3 (Quesito 2, MS 2011) Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate (4; 0). Rappresentare dinamicamente la soluzione del quesito con EffeDiX.

<u>*Come procedere*</u>

Tracciare il grafico della funzione sqrt(x).

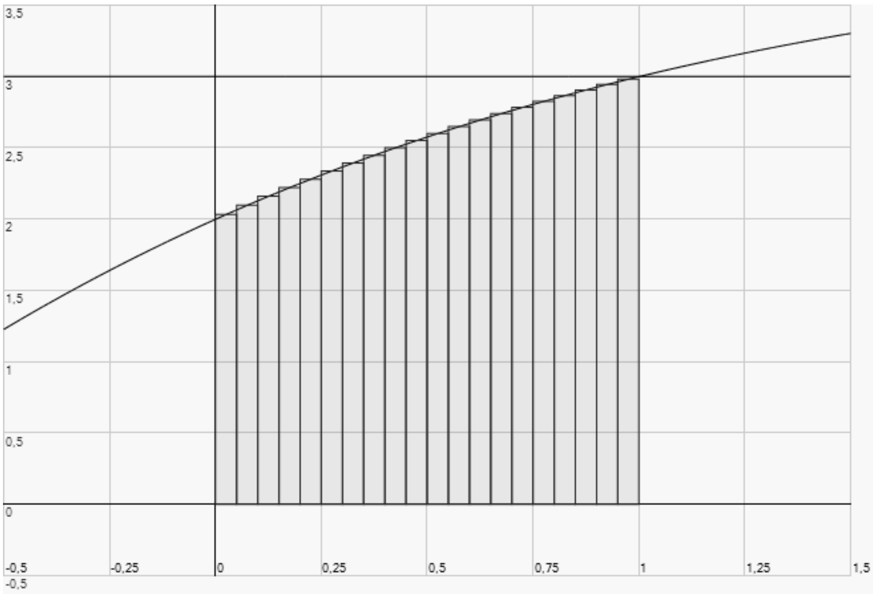


Tracciare il punto (4; 0) e la relativa etichetta A.
Dichiarare il parametro t (variabile tra 0 e 6 con 120 intervalli).
Tracciare il punto (t; sqrt(t)), la relativa etichetta B e le sue coordinate.
Tracciare il segmento di estremi (4; 0) e (t; sqrt(t)).
Tracciare il grafico della funzione (x-4)^2+x (leggi t al posto di x) che fornisce il quadrato della distanza di A da B.
Tracciare il punto (t; f(t)) dove f(x) è la funzione del passo precedente e la relativa etichetta C.
Tracciare il vertice della parabola y = (x-4)^2+x cioè il punto (7/2; f(7/2)) e le relative coordinate.
Il punto cercato si ottiene, trascinando il cursore della slider bar, quando C coincide con V.

Attività 4 (Problema 2, MS 2011) Sia *f* la funzione $f(x) = (ax + b)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ dove *a* e *b* sono due numeri reali che si chiede di determinare sapendo che *f* ammette un massimo nel punto di ascissa 4 e che f(0)=2. Si provi che a=1 e b=-1. Si tracci il grafico Γ di f(x). Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ, dall'asse y e dalla retta y=3. Rappresentare dinamicamente la soluzione del quesito con EffeDiX.

Come procedere

Poiché f(0)=b+3=2 deve essere b=-1. Tracciare quindi il grafico della funzione f(x)= $(ax - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ *avendo dichiarato il parametro* a*.*
Tracciare il grafico della derivata f'(x).
Verificare, trascinando il cursore della slider bar relativa al parametro a*, che la derivata si annulla in x=4 quando a=1 (massimo relativo di f(x)).*
Tracciare il plurirettangolo relativo a f(x) tra 0 e 1 (ad es. 20 rettangoli, tipo = medio).



Creare la tabella delle somme di Riemann relativa a f(x) tra 0 e 1 e 100 rettangoli, ottenendo l'approssimazione 2,5512 dell'integrale. Ne segue che l'area della regione cercata è con buona approssimazione 3-2,5512=0,4488.

Attività 5 (Moto ellittico). Considerare le equazioni orarie

x(t) = k·cos t
y(t) = sin t

con t che varia da 0 a 2π. Rappresentare un punto dinamico P(t) sulla traiettoria e i vettori velocità e accelerazione in P(t). Rappresentare inoltre le componenti tangenziale e centripeta dell'accelerazione e la circonferenza osculatrice in P(t).

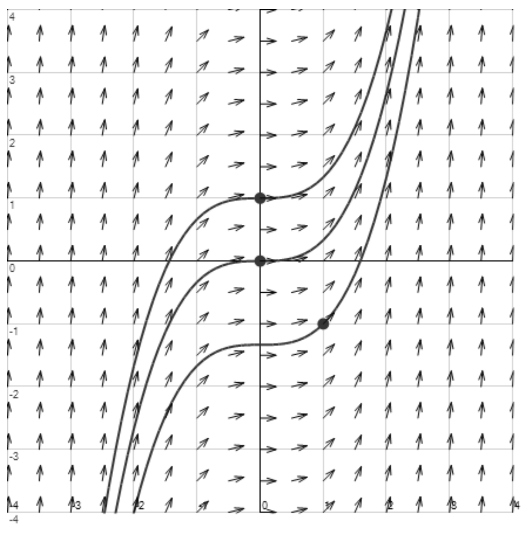
Come procedere

Impostare un sistema monometrico.
*Tracciare la curva parametrica x(t)=k*cost, y(t)=sint con t che varia tra 0 e 2pi (dichiarando il parametro* k*, ad esempio compreso tra 0 e 2 con 40 intervalli).*
*Tracciare il punto P(t)=(k*cost; sint) (dichiarando il parametro t, compreso tra 0 e 2pi con 100 intervalli).*
*Tracciare il vettore velocità (-k*sint; cost) applicato in (k*cost; sint).*
*Tracciare il vettore accelerazione (-k*cost; -sint) applicato in (k*cost; sint).*
*Tracciare la componente tangenziale del vettore accelerazione cioè il vettore proiezione di (-k*cost; -sint) su (-k*sint; cost) applicato in (k*cost; sint).*
*Tracciare la componente centripeta del vettore accelerazione cioè il vettore proiezione di (-k*cost; -sint) su una retta ortogonale al vettore (-k*sint; cost) applicato in (k*cost; sint).*
Tracciare la circonferenza osculatrice in P(t) cioè, con buona approssimazione, la circonferenza per i tre punti:
*(k*cost; sint); (k*cos(t+0,01); sin(t+0,01)); (k*cos(t-0,01); sin(t-0,01)).*
Ora abbiamo tutte le informazioni sul moto del punto: facendo variare t possiamo osservare la variazione dei vettori velocità e accelerazione (componente tangenziale e centripeta di quest'ultimo), facendo variare k possiamo ottenere varie traiettorie ellittiche (interessante il caso particolare di k=1, il moto circolare uniforme). Osserviamo che la componente centripeta dell'accelerazione punta sempre verso il centro di curvatura (cioè il centro della circonferenza osculatrice).

Attività 6 (Significato geometrico dell'integrale indefinito). Rappresentare con EffeDiX il campo vettoriale associato all'equazione differenziale $y'(x)=x^2$. Determinare graficamente le soluzioni passanti per i punti (0, 0), (0, 1) e (-1, 1).

Premessa

Calcolare l'integrale indefinito $\int x^2 dx$ *equivale a risolvere l'equazione differenziale* $y'(x)=x^2$*. Se y(x) è una soluzione di tale equazione, sappiamo che la pendenza della curva soluzione in un punto x è* x^2*; ad esempio in x=2 la pendenza della curva soluzione è 4. Possiamo quindi associare all'equazione un campo di direzioni come quello in figura; in ogni punto del piano (x, y) tracciamo un vettore che abbia pendenza* x^2*, ad esempio il vettore* $<1, x^2>$*; possiamo normalizzare questi vettori e moltiplicarli per uno stesso fattore di scala perché a noi interessa soltanto la direzione (nel caso in figura il modulo di tutti i vettori è 1/4). La curva soluzione passante per un certo punto* (x_0, y_0) *si ottiene quindi (in modo unico) partendo da questo punto e seguendo il "flusso" dei vettori (ma anche seguendo i vettori opposti) . La curva soluzione, in ogni suo punto, è tangente al relativo vettore del campo.*



Come procedere

Per tracciare il campo vettoriale: opzione ***Campo vettoriale****, Vx=1,* $Vy=x^2$*, vettori normalizzati, passo 1/2, k=1/4. Per tracciare la curva soluzione per (0, 0): opzione* ***Curva integrale****, x'=1,* $y'=x^2$*, x(0)=0, y(0)=0, traiettoria, passo=0,1, numero passi=100; poi passo -0,1.*