Equazioni differenziali: blow-up di una soluzione (problema di Cauchy) e intervallo massimale di esistenza

Esempio 1

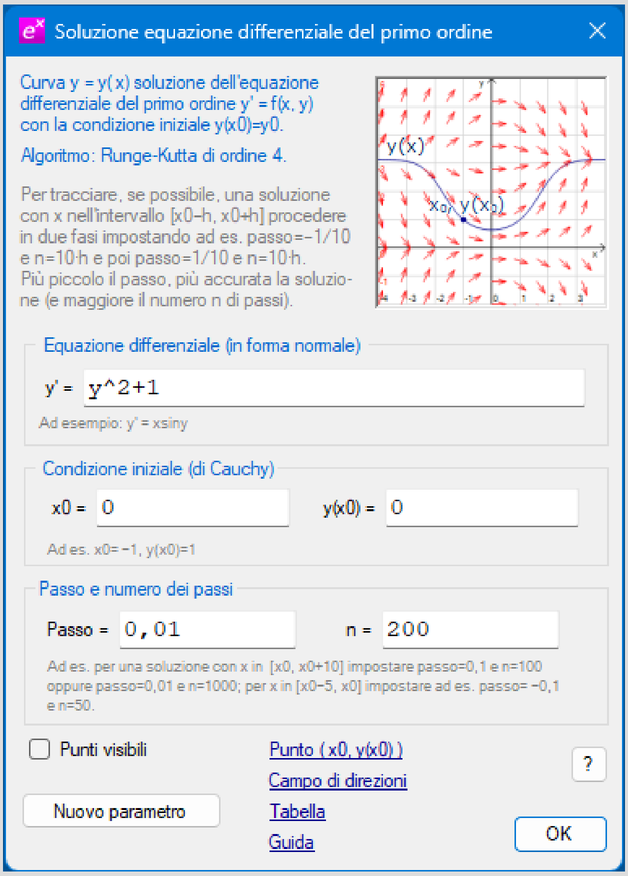
Risolvere numericamente il seguente problema di Cauchy

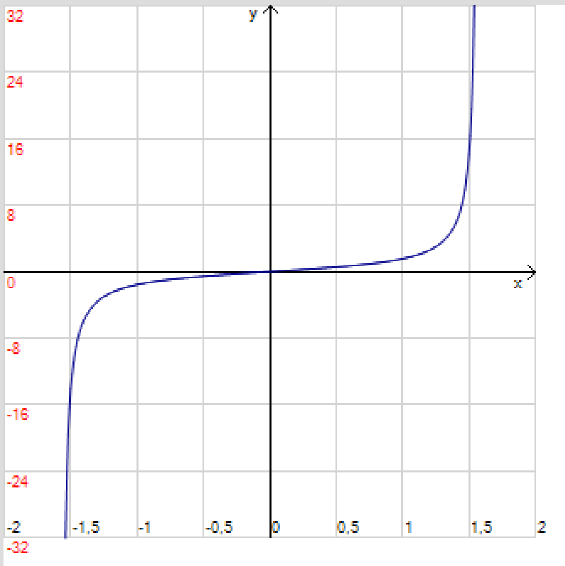
$$y' = y^2 + 1 \,, \quad x_0 = 0, \quad y(x_0) = 0$$

e determinare l'intervallo massimale di esistenza per la soluzione.

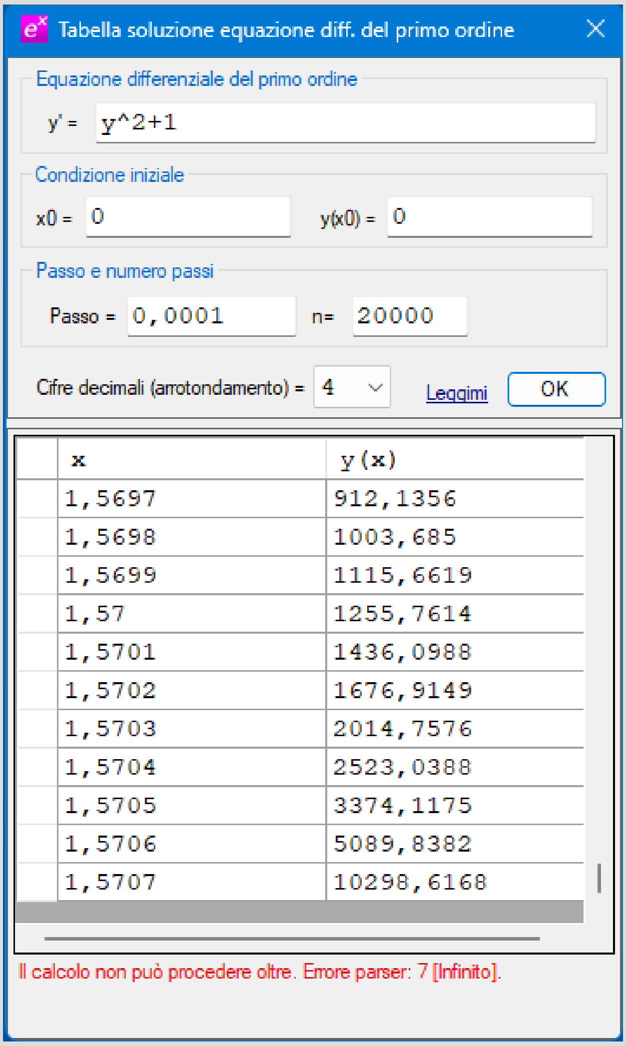
L'equazione è della forma $y' = f(x, y)$ con $f(x, y)$ continua e derivabile con continuità rispetto a y in un intorno dell'origine. Il teorema di esistenza e unicità garantisce l'unicità della soluzione $y(x)$ **in un intorno del valore iniziale** $x_0 = 0$. Tuttavia il teorema non ci dice se la soluzione esiste per ogni x reale o quale sia l'intervallo massimale di esistenza. Vediamo come procedere con EffeDiX.

Tracciamo la soluzione in un intorno sinistro e in un intorno destro del valore iniziale $x_0=0$. Useremo l'opzione *Calcolo – Equazione differenziale del primo ordine*; le figure seguenti mostrano la finestra d'impostazione relativa all'intervallo destro (per quello sinistro basta prendere un passo negativo) e il grafico della soluzione $y(x)$.

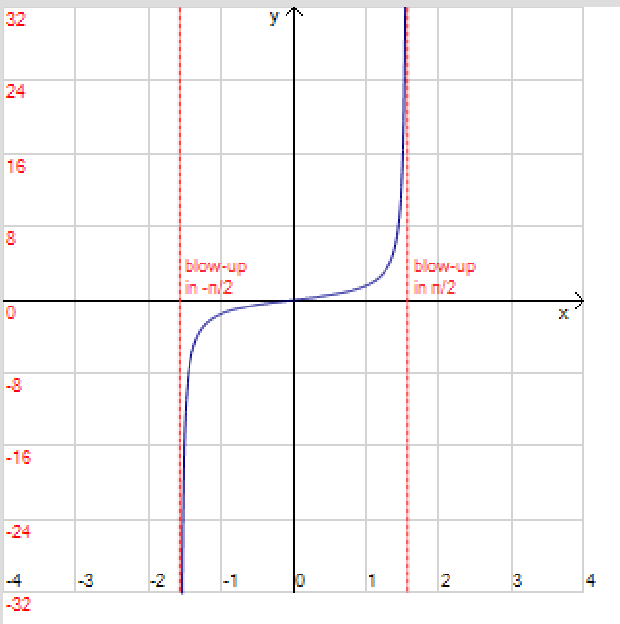




Notare che l'intorno destro di zero impostato per la variazione di x nella finestra d'impostazione in figura è da 0 a 2 (si parte da $x_0=0$ e si fanno 200 passi di ampiezza 0,01) ma **non è detto** che EffeDiX possa costruire la soluzione in tutto l'intervallo cioè **non è detto** che la soluzione $y(x)$ esista in tutto l'intervallo.



x	y(x)
1,5697	912,1356
1,5698	1003,685
1,5699	1115,6619
1,57	1255,7614
1,5701	1436,0988
1,5702	1676,9149
1,5703	2014,7576
1,5704	2523,0388
1,5705	3374,1175
1,5706	5089,8382
1,5707	10298,6168



Osservando il grafico potremmo sospettare che la funzione y(x) abbia due asintoti verticali, per accertarcene possiamo utilizzare l'opzione *Tabella* con un passo molto piccolo, ad esempio 0,0001 (vedi figura a fianco). L'opzione *Tabella* si trova nella stessa finestra d'impostazione, in basso.

Come si vede, EffeDiX calcola la soluzione fino a *x=1,5707* e poi invia il messaggio di errore "Il calcolo non può procedere oltre. Errore parser: 7 (infinito)". Questo messaggio segnala il fatto che per *x* **approssimativamente** uguale a 1,5707 si ha blow-up in tempo finito della soluzione (la soluzione "esplode", "raggiunge infinito" in tempo finito)[1].

In modo analogo si può verificare che con passo negativo la soluzione ha blow-up approssimativamente per x=-1,5707.

Ne consegue che l'intervallo massimale di esistenza è approssimativamente

$$-1{,}5707 < x < 1{,}5707$$

Nel nostro caso siamo in grado di trovare la soluzione simbolica *y(x)* del problema di Cauchy (l'equazione è a variabili separabili):

$$y(x) = \tan(x)$$

L'intervallo massimale di esistenza, cioè il più ampio **intervallo** che contenga $x_0=0$ e **in cui la soluzione sia definita e derivabile** è evidentemente

$$-\pi/2 < x < \pi/2$$

Si ha inoltre che il limite di *y(x)* per $x \to -\pi/2$ da destra è $-\infty$ e il limite per $x \to \pi/2$ da sinistra è $+\infty$.

1 In alcuni casi è possibile che lo stesso messaggio segnali un break-down della soluzione, ad esempio, in alcuni problemi di Cauchy del secondo ordine, il messaggio segnala il blow-up della derivata y'(x) e non della soluzione y(x). In ogni caso il messaggio segnala il fatto che, nel corso del calcolo, si è approssimativamente raggiunto un estremo dell'intervallo massimale di esistenza.

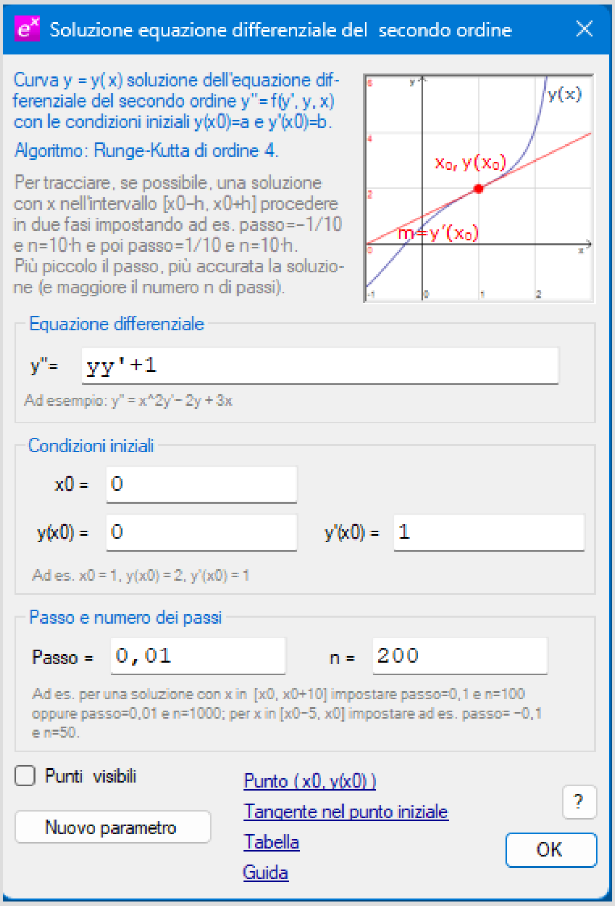
Esempio 2

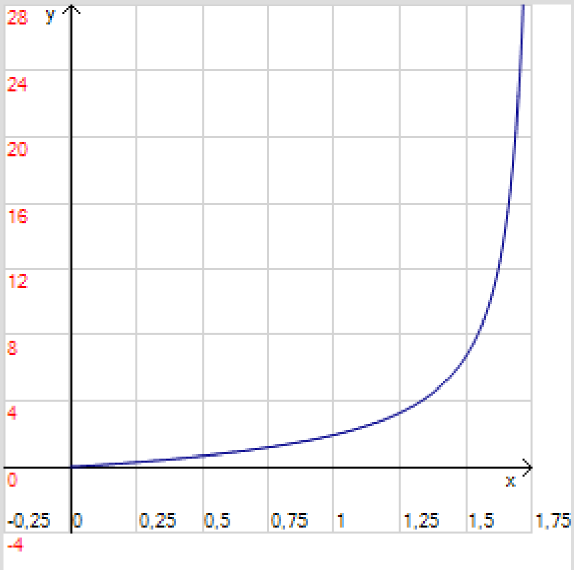
Dato il problema di Cauchy

$$y'' = y\,y' + 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

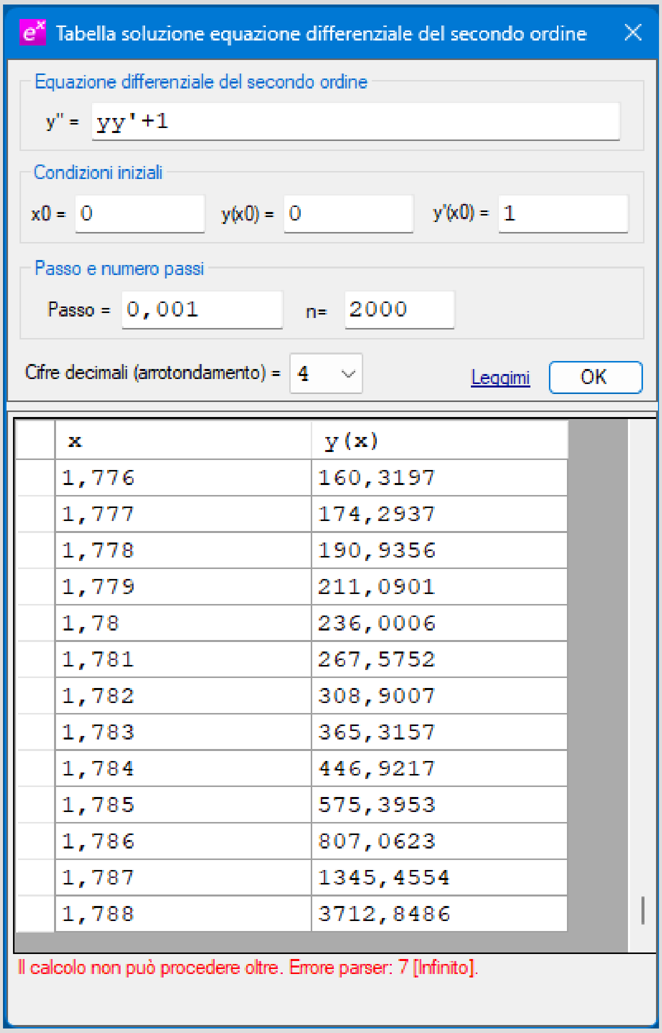
determinare il tempo di vita nel futuro per la soluzione e il suo intervallo massimale di esistenza per *t* non negativo.

In questo caso l'equazione è non lineare del secondo ordine e, a differenza dell'esempio 1, non è possibile determinare una soluzione simbolica (in termini di funzioni elementari). Useremo l'opzione *Calcolo – Equazione differenziale del secondo ordine*. Le figure seguenti mostrano la finestra d'impostazione e il grafico della soluzione *y(x)*.





Il grafico della soluzione *y(x)* suggerisce l'esistenza di un asintoto verticale; per accertarcene procediamo come nell'esempio precedente generando una tabella per i valori di *y(x)* a partire da *x=0* e con passo molto piccolo. La tabella in figura seguente.



x	y(x)
1,776	160,3197
1,777	174,2937
1,778	190,9356
1,779	211,0901
1,78	236,0006
1,781	267,5752
1,782	308,9007
1,783	365,3157
1,784	446,9217
1,785	575,3953
1,786	807,0623
1,787	1345,4554
1,788	3712,8486

Come si vede, EffeDiX calcola la soluzione fino al valore $x=1{,}788$ in cui si ha approssimativamente il blow-up in tempo finito della soluzione.

Quindi il tempo di vita nel futuro della soluzione è approssimativamente 1,788 e l'intervallo massimale di esistenza per valori non negativi di x è

$$0 \le x < 1{,}788$$

Il valore numerico, approssimato da Mathematica (Wolfram), per il blow-up è

$$x = 1{,}7884$$