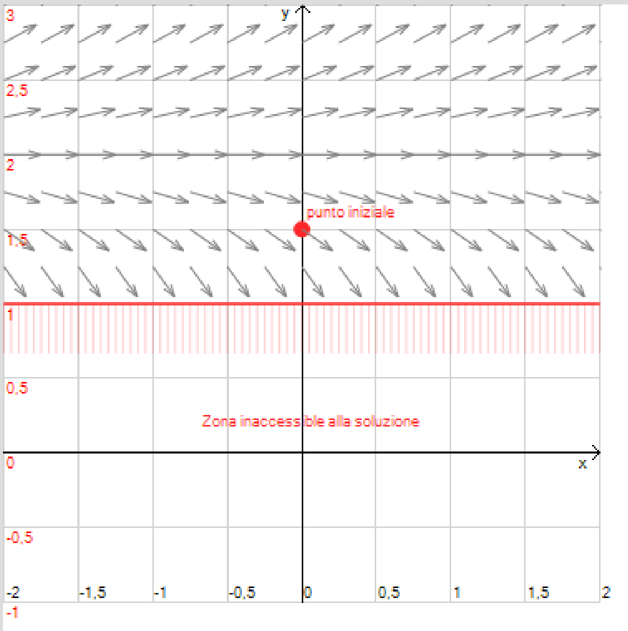
Equazioni differenziali: break-down di una soluzione e intervallo massimale di esistenza

Esempio 1

Risolvere numericamente il seguente problema di Cauchy

$$y' = \log(y-1), \quad x_0=0, \quad y(x_0)=3/2$$

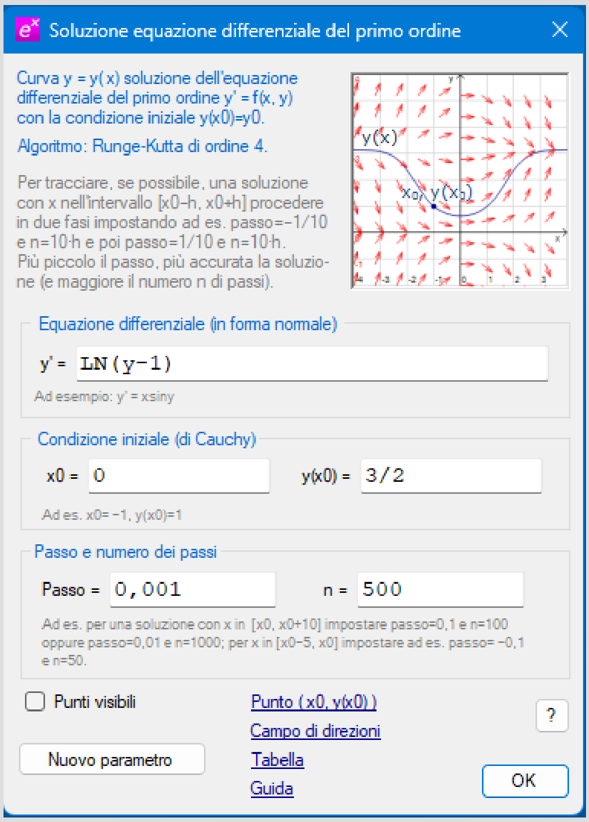
e determinare l'intervallo massimale di esistenza per la soluzione.

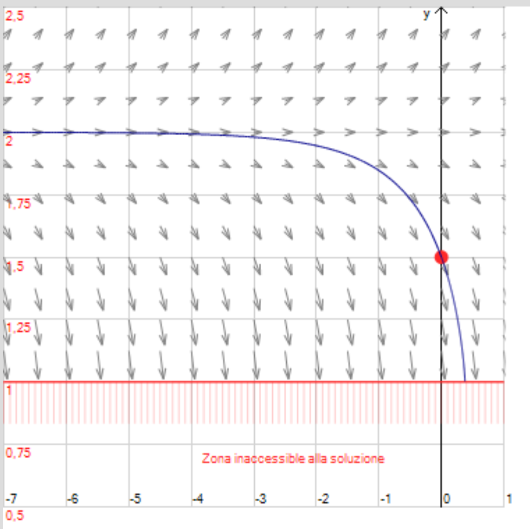


L'equazione è della forma $y' = f(x, y)$ con $f(x, y)$ continua e derivabile con continuità rispetto a y in un intorno del punto (0, 3/2). Il teorema di esistenza e unicità garantisce l'unicità della soluzione $y(x)$ **in un intorno del valore iniziale** $x_0=0$. Tuttavia il teorema non ci dice quale sia l'intervallo massimale di esistenza. In particolare l'equazione **non è definita** se $y(x) \leq 1$, cioè la soluzione non può entrare nella zona di piano al di sotto della retta $y=1$ né toccare tale retta. La figura a fianco mostra il campo vettoriale associato all'equazione differenziale; come si vede i vettori non sono definiti sulla o sotto la retta $y=1$.

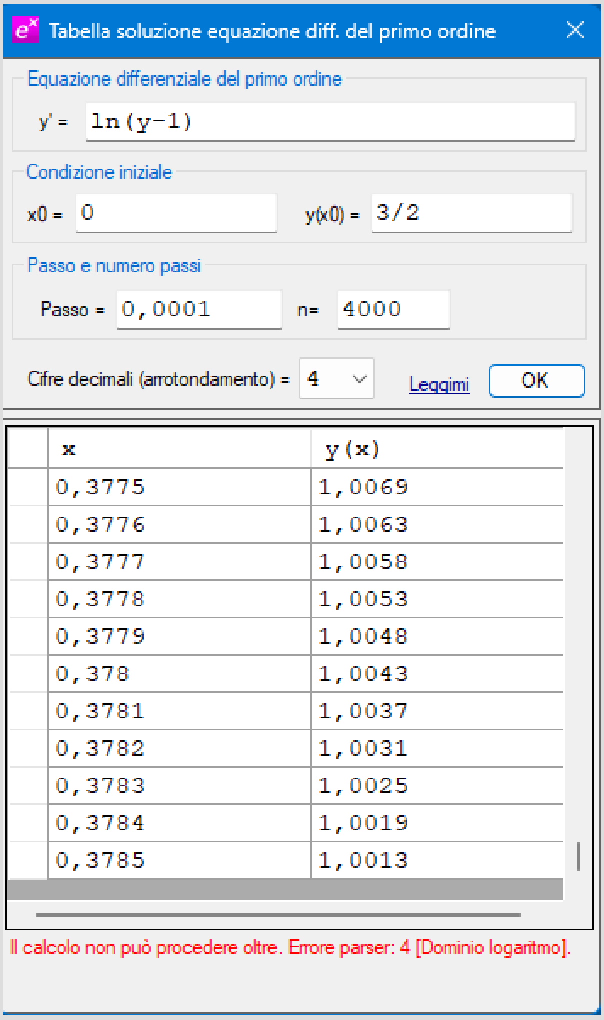
Vediamo come procedere con EffeDiX.

Tracciamo la soluzione in un intorno sinistro e in un intorno destro del valore iniziale $x_0=0$. Useremo l'opzione *Calcolo – Equazione differenziale del primo ordine*; le figure seguenti mostrano la finestra d'impostazione relativa all'intervallo destro (per quello sinistro basta prendere un passo negativo, ad es. -0,05 e 500 passi) e il grafico della soluzione $y(x)$.





Zoomando sul grafico possiamo già valutare che in $x \approx 0{,}38$ si ha break-down della soluzione, cioè la soluzione tocca la retta $y=1$. Per un'approssimazione più accurata generiamo la tabella seguente, con passo 0,0001, facendo clic sull'opzione *Tabella* che si trova nella finestra d'impostazione precedente.



Come si vede, EffeDiX calcola la soluzione a partire da $x_0=0$, con passo positivo, fino a $x=0{,}3785$ e a questo punto ci invia il messaggio: "*Il calcolo non può procedere oltre. Errore parser: 4 [Dominio logaritmo]*"; in questo modo EffeDiX ci segnala il break-down della soluzione, infatti il valore $y(0{,}3785)$ è molto vicino ad 1 e al passo successivo l'espressione $log(y(x)\text{-}1)$ perde di significato.

Osservando il grafico e il campo vettoriale ci si rendo poi conto che la soluzione ha, nel passato, esistenza globale, quindi possiamo concludere che il punto di break-down è approssimativamente

$$x=0{,}3785$$

e l'intervallo massimale di esistenza è

$$-\infty < x < 0{,}3785$$

Esempio 2

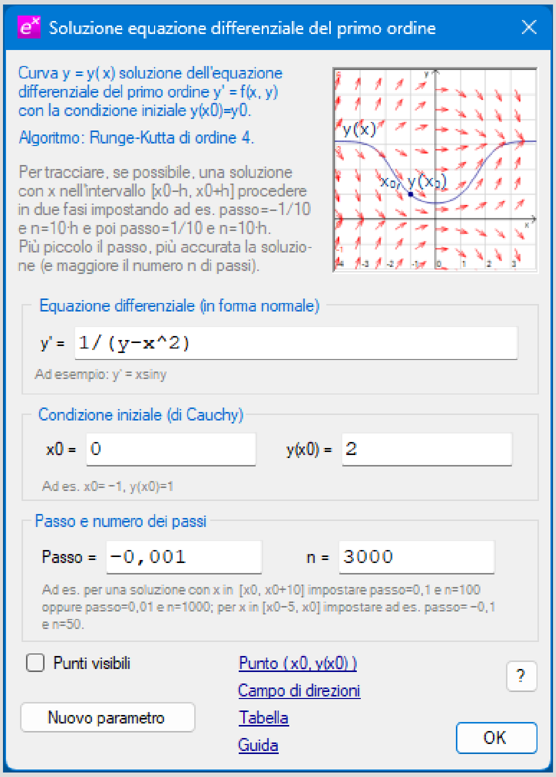
Studiare la soluzione del seguente problema di Cauchy

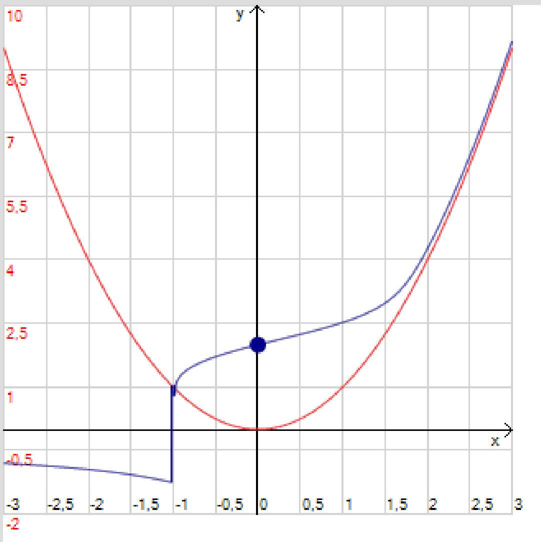
$$y' = 1/(y-x^2),\quad x_0=0,\quad y(x_0)=2$$

nell'intervallo (-3, 3).

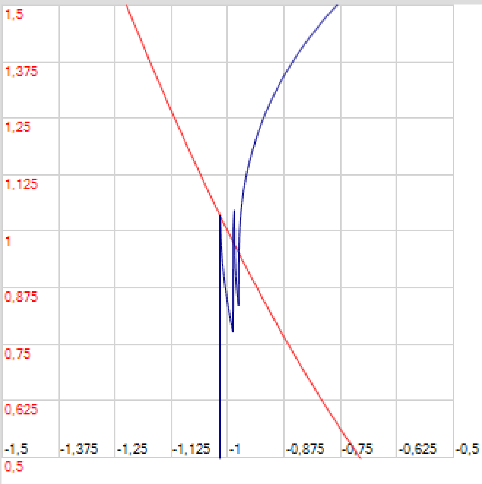
Osserviamo prima di tutto che la soluzione *y(x)* **non può toccare la parabola $y=x^2$** perché l'equazione perderebbe di significato. Proviamo a tracciare la soluzione nell'intervallo (-3, 3). Per avere la massima accuratezza impostiamo, per l'intorno sinistro, un passo uguale a -0,001 e 3000 passi (tali impostazioni consentirebbero a EffeDiX di tracciare, **se possibile**, la soluzione nell'intervallo [-3, 0] poiché il calcolo parte da $x_0=0$); analogamente procediamo per l'intervallo destro [0, 3]. Le figure seguenti mostrano la finestra d'impostazione relativa all'intervallo sinistro (per il destro basta cambiare il segno del passo) e il grafico della soluzione *y(x)*.

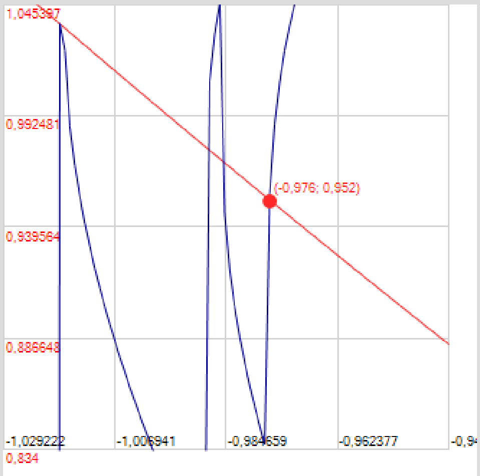
Come si vede la soluzione tocca la parabola all'incirca nel punto (-1, 1) dove si ha break-down. Ma perché EffeDiX continua a tracciare il grafico anche per valori minori di -1? Il problema è che l'algoritmo di Runge-Kutta utilizzato da EffeDiX non riesce, in generale, a riconoscere il break-down della soluzione se l'insieme inaccessibile è un curva (diversamente da quanto accade se l'insieme inaccessibile alla soluzione è una regione 2D di piano, vedi esempio precedente).





Per capire meglio quello che succede operiamo alcune zoomate successive sul punto di break-down (vedi le figure seguenti, la seconda è una zoomata sulla prima).





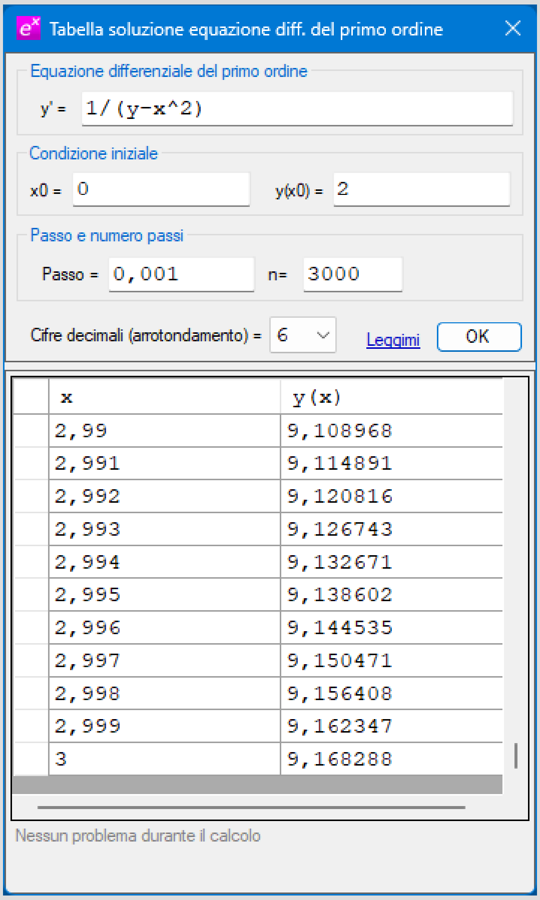
Come si vede quando la soluzione tocca la parabola **per la prima volta**, approssimativamente nel punto (-0,976; 0,952), l'algoritmo RK diventa **instabile** e il grafico presenta **cuspidi** e **punti angolosi** perché l'algoritmo "aggancia" via via diverse soluzioni (che ovviamente non verificano la condizione iniziale). In conclusione il punto di break-down è *x=-0,976*, con buona approssimazione.

Nel nostro caso non sappiamo risolvere l'equazione differenziale simbolicamente, possiamo farlo solo numericamente; il punto di break-down fornito da Mathematica (Wolfram) è

x = -0.975686

Per quanto riguarda l'intorno destro di x_0 non ci sono problemi, la soluzione continua ad essere crescente e tende ad approssimare la parabola. In *x=3* la soluzione vale approssimativamente 9,168 (vedi tabella a fianco). Quindi l'intervallo massimale di esistenza della soluzione all'interno dell'intervallo di studio è

-0,976 < x ≤ 3



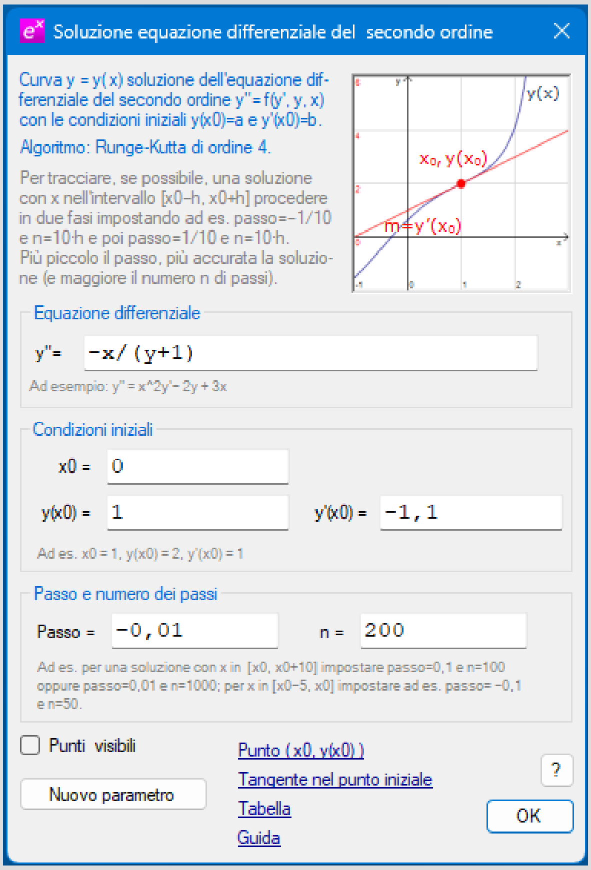
Esempio 3

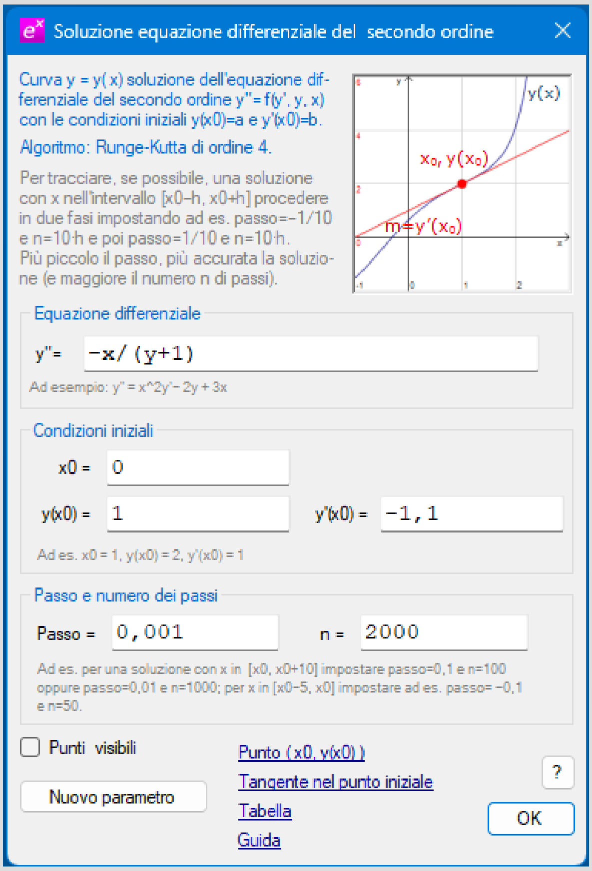
Studiare la soluzione del seguente problema di Cauchy

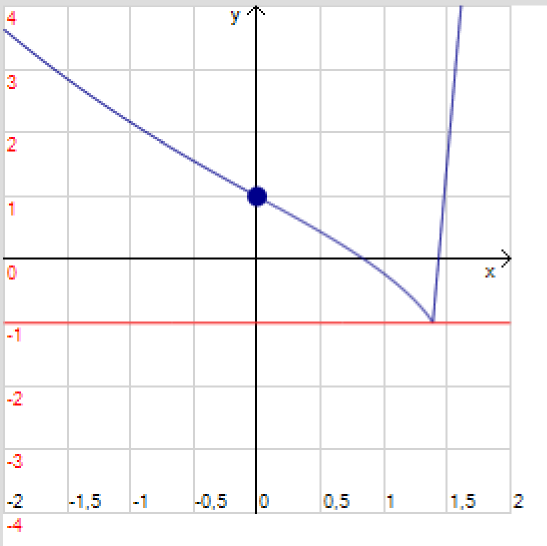
$$y'' = -x/(y+1), \quad x_0=0, \quad y(x_0) = 1, \quad y'(x_0) = -11/10$$

nell'intervallo (-2, 2).

L'opzione da utilizzare è *Calcolo – Equazione differenziale del secondo ordine*. Le figure seguenti mostrano le finestre d'impostazione per l'intorno sinistro e destro del punto iniziale $x_0=0$ e il grafico della soluzione tracciato da EffeDiX (è stata anche tracciata la retta $y=-1$ sui cui punti l'equazione differenziale perde di significato).







Come si vede, nell'intervallo [-2, 0] non ci sono problemi mentre, durante il calcolo nell'intervallo [0, 2], c'è break-down della soluzione quando il grafico tocca la retta $y=-1$, in $x \approx 1{,}39$. Quindi l'intervallo massimale di esistenza nell'intervallo di studio è (-2; 1,39). Per avere valori accurati della soluzione utilizzare come al solito l'opzione *Tabella* presente nella finestra d'impostazione.

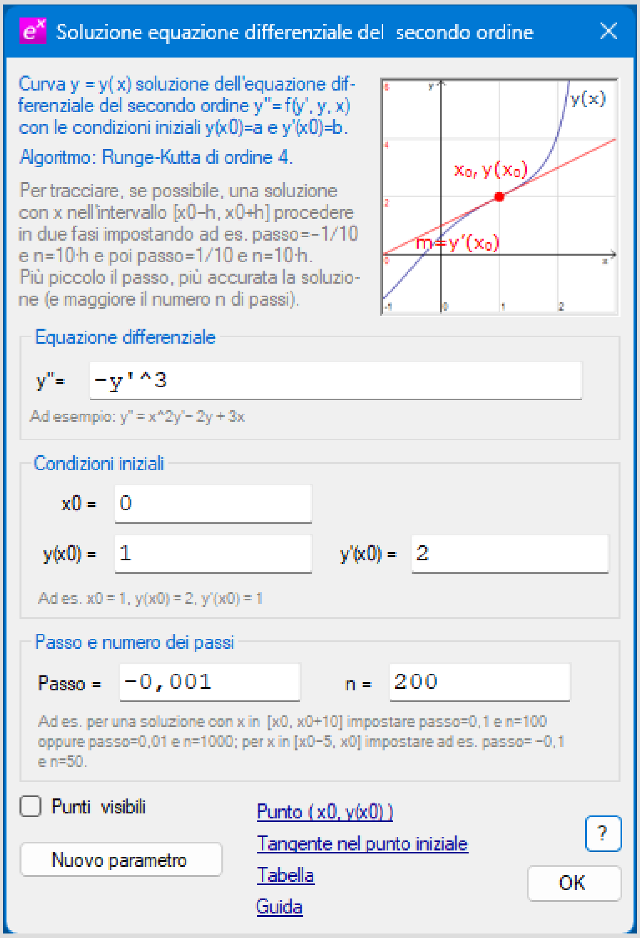
Esempio 4

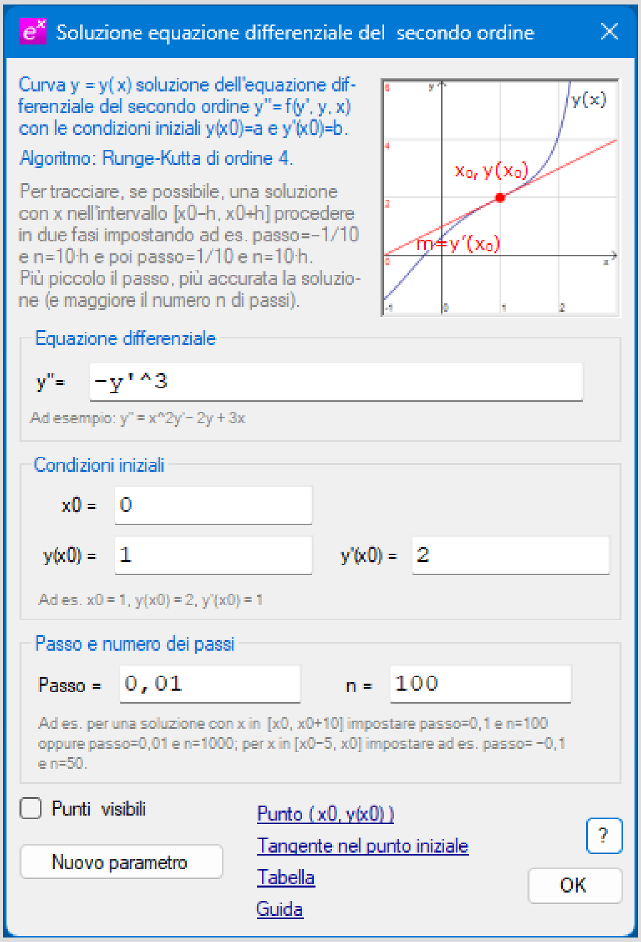
Studiare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$y'' = -y'^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

nell'intervallo (-1, 1).

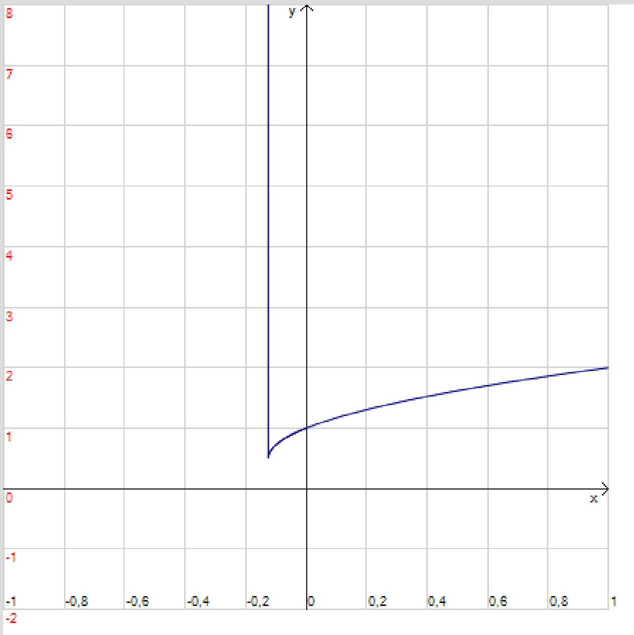
Le due finestre d'impostazione per tracciare la soluzione:

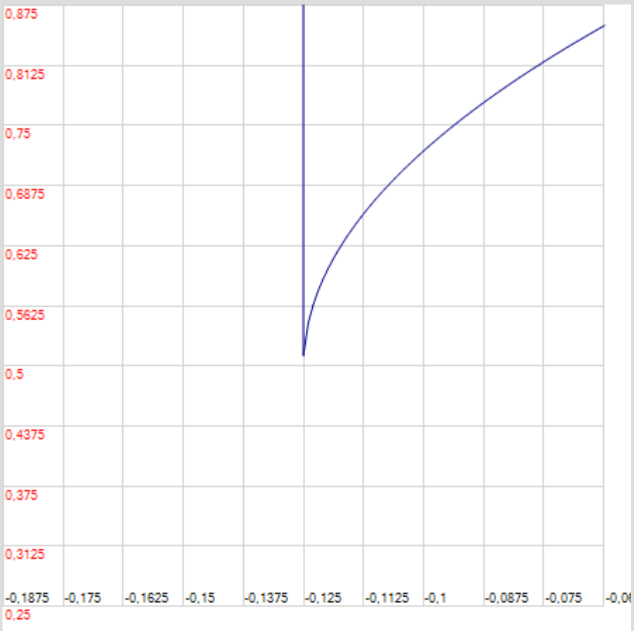




Le figure seguenti mostrano il grafico della soluzione *y(x)*. Si nota subito un **punto angoloso** approssimativamente in $x=-0{,}125$; come si è già osservato un punto angoloso segnala un break-down della soluzione. Quindi l'intervallo massimale di esistenza della soluzione all'interno dell'intervallo di studio è

$$-0{,}125 < x \leq 1$$





Come ulteriore conferma del break-down della soluzione *y(x)* possiamo tracciare il grafico della derivata *y'(x)*. A questo scopo conviene riscrivere l'equazione iniziale e le condizioni in questo modo

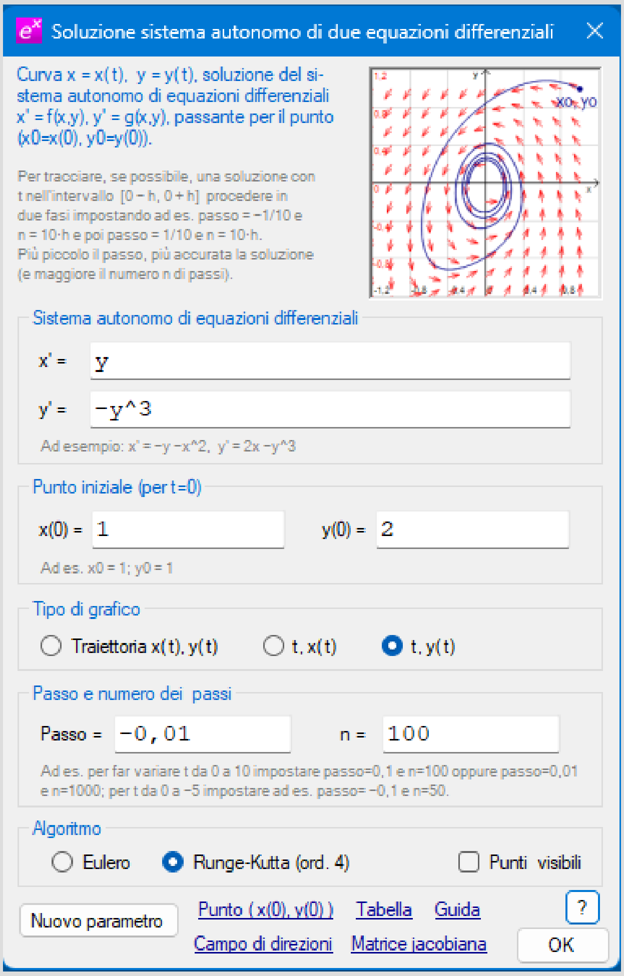
$$x''(t) = -x'(t)^3, \quad x(0)=1, \quad x'(0)=2$$

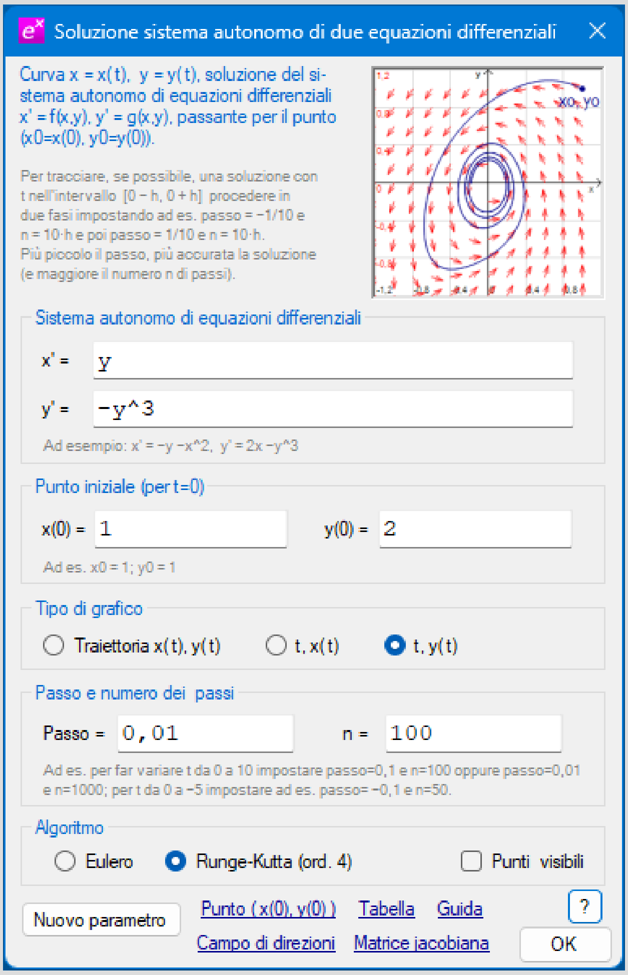
(abbiamo semplicemente indicato la funzione incognita *y(x)* con *x(t)*). Se chiamiamo *y(t)* la funzione *x'(t)* possiamo trasformare l'equazione del secondo ordine, posta nella forma precedente, in un **sistema** di due equazione differenziali del primo ordine, in questo modo

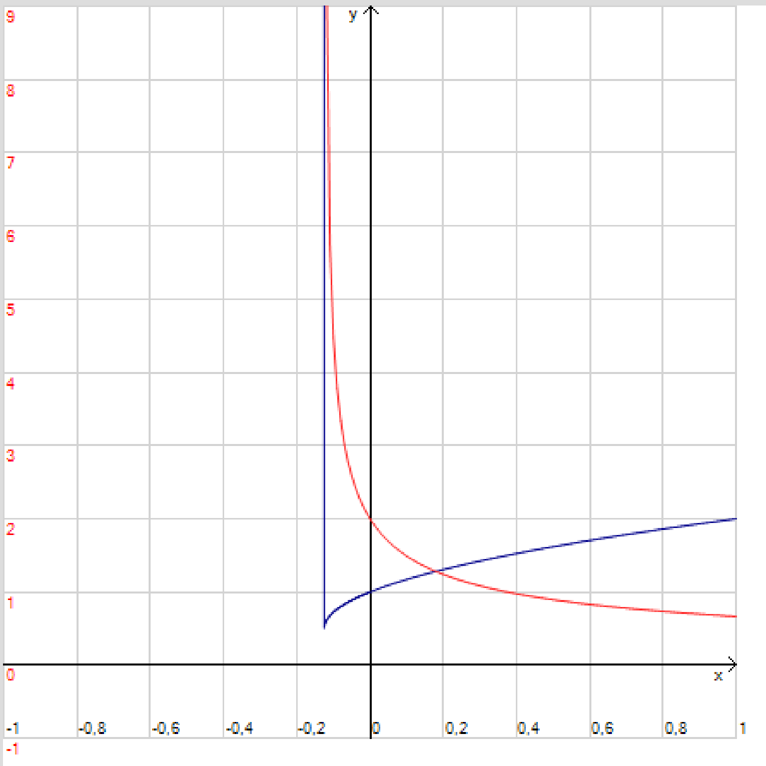
$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -y(t)^3 \end{cases}$$

Ora risolveremo con EffeDiX il problema di Cauchy dato da tale sistema insieme alle condizioni iniziali *x(0)=1* e *y(0)=2*. Le figure seguenti mostrano le finestre di impostazione per il problema di Cauchy, l'opzione da utilizzare è *Calcolo – Sistema autonomo equazioni differenziali*. Notare che nelle finestre di impostazione è selezionato il tipo di grafico "*t, y(t)*" che nel nostro caso è proprio il grafico della derivata *x'(t)* in funzione di *t*.

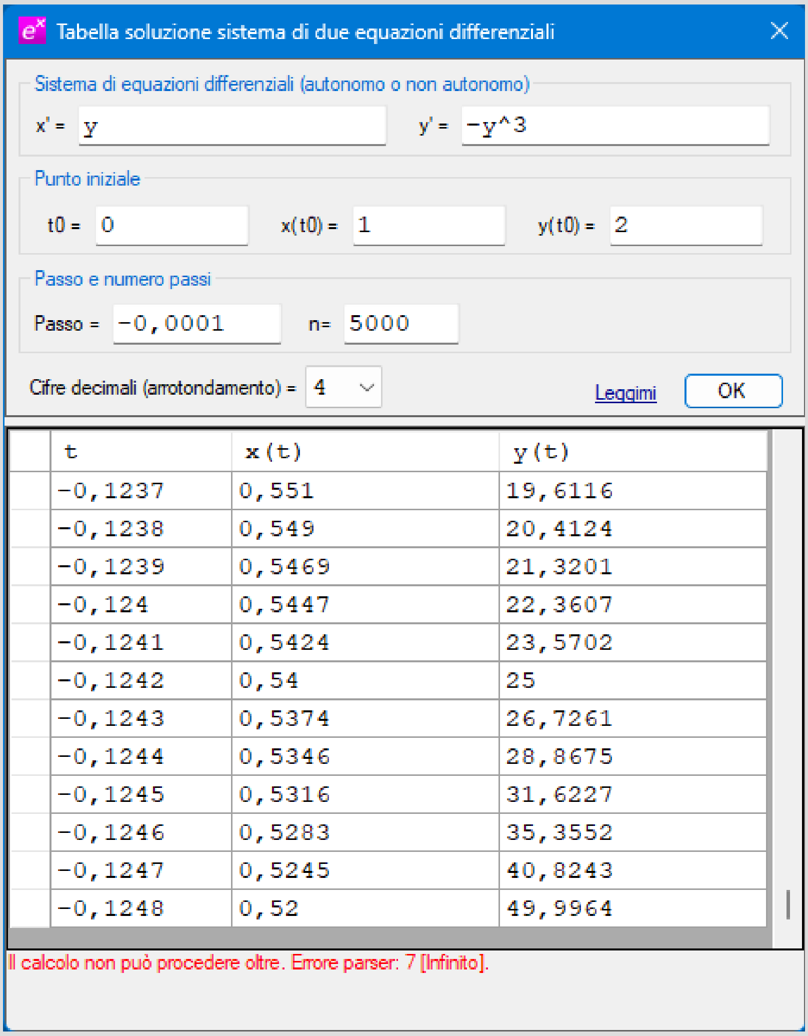
L'ultima delle figure seguenti mostra, in rosso, il grafico ottenuto. Come si vede la derivata *x'(t)* ha **blow-up** in corrispondenza del punto angoloso.


Soluzione sistema autonomo di due equazioni differenziali
Curva x = x(t), y = y(t), soluzione del sistema autonomo di equazioni differenziali x' = f(x,y), y' = g(x,y), passante per il punto (x0=x(0), y0=y(0)).
Per tracciare, se possibile, una soluzione con t nell'intervallo [0 − h, 0 + h] procedere in due fasi impostando ad es. passo = −1/10 e n = 10·h e poi passo = 1/10 e n = 10·h.
Più piccolo il passo, più accurata la soluzione (e maggiore il numero n di passi).
x0, y0
Sistema autonomo di equazioni differenziali
x' = y
y' = −y^3
Ad esempio: x' = −y −x^2, y' = 2x −y^3
Punto iniziale (per t=0)
x(0) = 1
y(0) = 2
Ad es. x0 = 1; y0 = 1
Tipo di grafico
Traiettoria x(t), y(t)
t, x(t)
t, y(t)
Passo e numero dei passi
Passo = −0,01
n = 100
Ad es. per far variare t da 0 a 10 impostare passo=0,1 e n=100 oppure passo=0,01 e n=1000; per t da 0 a −5 impostare ad es. passo= −0,1 e n=50.
Algoritmo
Eulero
Runge-Kutta (ord. 4)
Punti visibili
Nuovo parametro
Punto (x(0), y(0))
Tabella
Guida
?
Campo di direzioni
Matrice jacobiana
OK


Soluzione sistema autonomo di due equazioni differenziali
Curva x = x(t), y = y(t), soluzione del sistema autonomo di equazioni differenziali x' = f(x,y), y' = g(x,y), passante per il punto (x0=x(0), y0=y(0)).
Per tracciare, se possibile, una soluzione con t nell'intervallo [0 − h, 0 + h] procedere in due fasi impostando ad es. passo = −1/10 e n = 10·h e poi passo = 1/10 e n = 10·h.
Più piccolo il passo, più accurata la soluzione (e maggiore il numero n di passi).
x0, y0
Sistema autonomo di equazioni differenziali
x' = y
y' = −y^3
Ad esempio: x' = −y −x^2, y' = 2x −y^3
Punto iniziale (per t=0)
x(0) = 1
y(0) = 2
Ad es. x0 = 1; y0 = 1
Tipo di grafico
Traiettoria x(t), y(t)
t, x(t)
t, y(t)
Passo e numero dei passi
Passo = 0,01
n = 100
Ad es. per far variare t da 0 a 10 impostare passo=0,1 e n=100 oppure passo=0,01 e n=1000; per t da 0 a −5 impostare ad es. passo= −0,1 e n=50.
Algoritmo
Eulero
Runge-Kutta (ord. 4)
Punti visibili
Nuovo parametro
Punto (x(0), y(0))
Tabella
Guida
?
Campo di direzioni
Matrice jacobiana
OK


y
x
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-1
-0,8
-0,6
-0,4
-0,2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1

Facendo clic sull'opzione "Tabella" presente nelle finestre d'impostazione del sistema, possiamo generare una tabella dei valori *t, x(t), y(t)* (nel nostro caso *y(t)=x'(t)*); come si vede nella figura seguente, EffeDiX calcola la soluzione fino approssimativamente a *t=-0,125* e invia il messaggio "Il calcolo non può precedere oltre. Errore parser: 7 [Infinito]". Tale messaggio segnala, in questo caso, il **blow-up della derivata** *x'(t)*.



t	x(t)	y(t)
-0,1237	0,551	19,6116
-0,1238	0,549	20,4124
-0,1239	0,5469	21,3201
-0,124	0,5447	22,3607
-0,1241	0,5424	23,5702
-0,1242	0,54	25
-0,1243	0,5374	26,7261
-0,1244	0,5346	28,8675
-0,1245	0,5316	31,6227
-0,1246	0,5283	35,3552
-0,1247	0,5245	40,8243
-0,1248	0,52	49,9964