Equazioni differenziali del secondo ordine: problemi con condizioni al bordo

EffeDiX può risolvere, numericamente e graficamente, **problemi di Cauchy** relativi ad equazioni differenziali del primo e secondo ordine e a sistemi di due equazioni del primo ordine. Non è disponibile un'opzione per risolvere direttamente **problemi con condizioni al bordo** (o al contorno) relativi ad equazioni differenziali del secondo ordine; tuttavia è possibile approssimare le soluzioni di tali problemi utilizzando la parametrizzazione di un opportuno problema di Cauchy e/o il ricorso al piano delle fasi. Gli esempi seguenti mostrano come procedere.

Per un problema di Cauchy del secondo ordine sono assegnati i valori della soluzione y(x) e della sua derivata y′(x) nello **stesso** punto x_0; per un problema con valori al bordo sono assegnati i valori $y(x_1)$ e $y(x_2)$ oppure $y'(x_1)$ e $y'(x_2)$ oppure $y(x_1)$ e $y'(x_2)$ dove x_1 e x_2 sono punti **distinti**. Ricordiamo inoltre che mentre per i problemi di Cauchy esistono teoremi di esistenza e unicità per le soluzioni (sotto ipotesi molto generali per le funzioni che entrano in gioco), per i problemi al bordo le cose sono più complicate, esistono infatti situazioni "regolari" in cui le soluzioni possono non esistere o non essere uniche (vedi l'esempio 2).

Esempio 1

Risolvere il seguente problema al bordo:

$$y'' = -4y,\ \ y(0)=-2,\ \ y(\pi/4) = 1$$

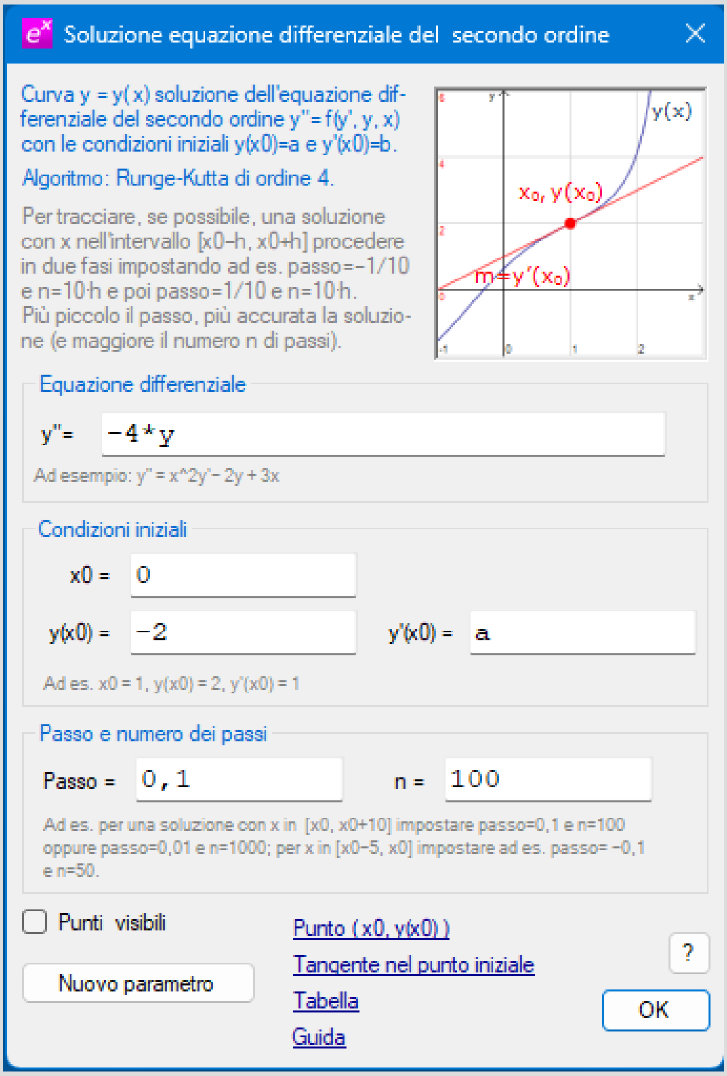
1) Tracciamo il punto ($\pi/4$, 1).

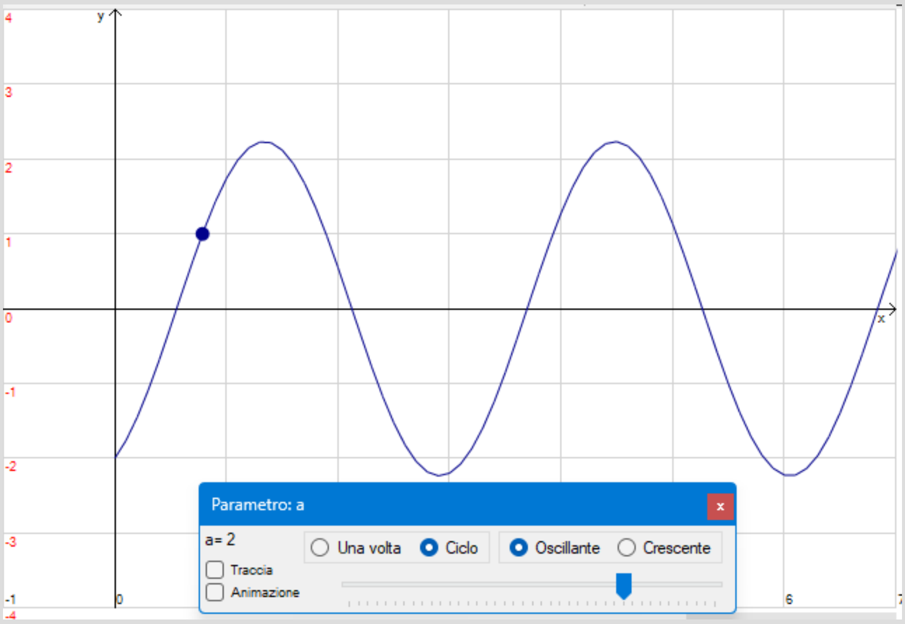
2) Tracciamo la soluzione relativa al problema di Cauchy

$$y''=-4y,\ \ y(0)=-2,\ \ y'(0) = a$$

dove *a* è un parametro che faremo variare fino a quando la curva non passa per il punto ($\pi/4$, 1). Ciò avviene quando il parametro *a* è approssimativamente uguale a 2. Notare che la prima condizione è la stessa del problema al bordo e la condizione sulla derivata è stata parametrizzata.

La figura a fianco mostra la finestra d'impostazione per il problema di Cauchy e la figura seguente mostra la soluzione del problema al bordo (facendo variare il parametro è anche facile rendersi conto che tale soluzione è unica).





Nel nostro caso è anche facile calcolare l'unica soluzione in forma simbolica:

y(x) = -2cos(2x) + sin(2x)

e si può verificare che è ben approssimata dalla soluzione numerica fornita da EffeDiX. Le tabelle seguenti mostrano i valori relativi alla soluzione numerica (a sinistra) e alla soluzione analitica (a destra).

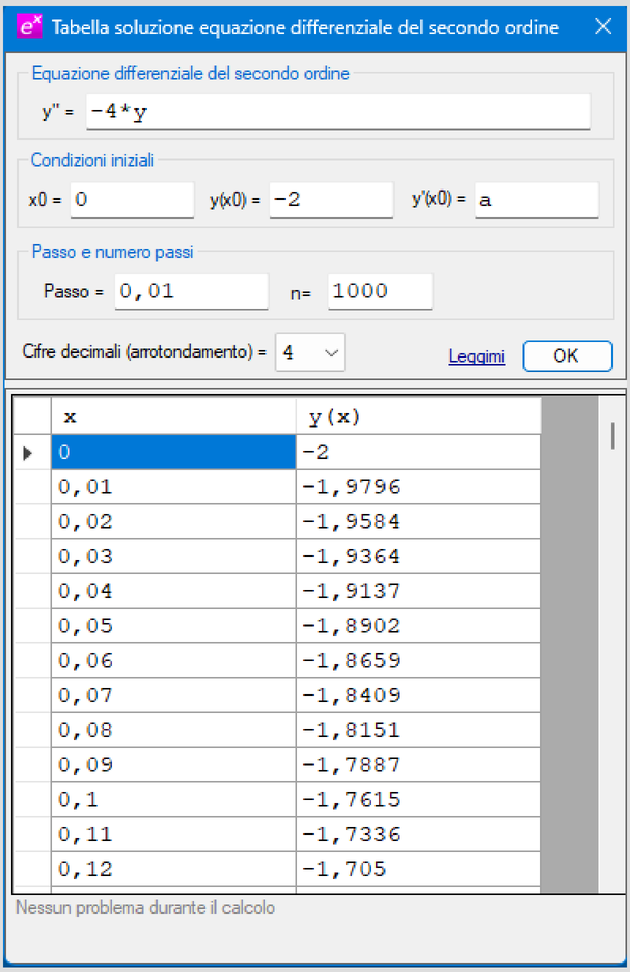


Tabella soluzione equazione differenziale del secondo ordine

Equazione differenziale del secondo ordine

y" = -4*y

Condizioni iniziali

x0 = 0   y(x0) = -2   y'(x0) = a

Passo e numero passi

Passo = 0,01   n= 1000

Cifre decimali (arrotondamento) = 4   Leggimi   OK

x	y(x)
0	-2
0,01	-1,9796
0,02	-1,9584
0,03	-1,9364
0,04	-1,9137
0,05	-1,8902
0,06	-1,8659
0,07	-1,8409
0,08	-1,8151
0,09	-1,7887
0,1	-1,7615
0,11	-1,7336
0,12	-1,705

Nessun problema durante il calcolo

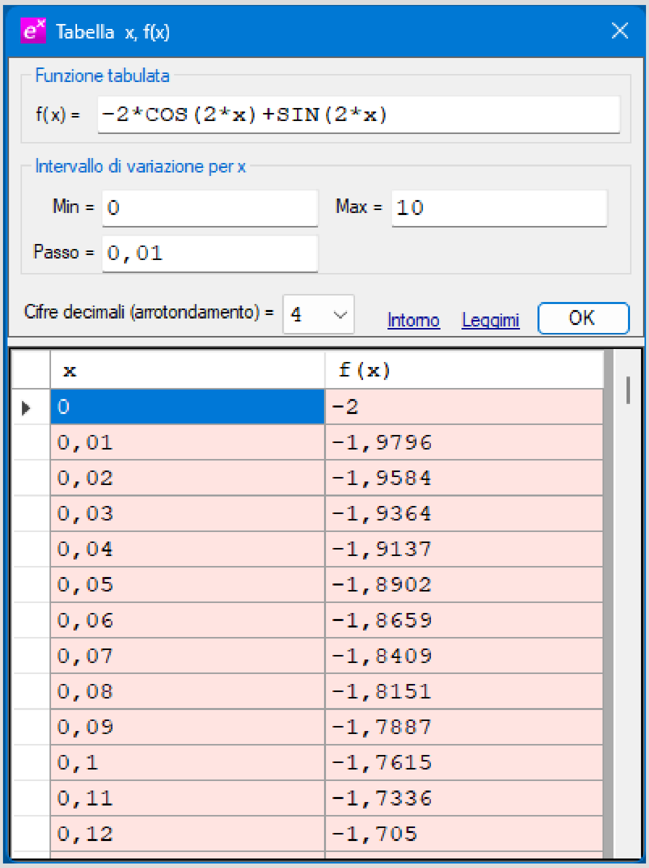


Tabella x, f(x)

Funzione tabulata

f(x) = -2*COS(2*x)+SIN(2*x)

Intervallo di variazione per x

Min = 0   Max = 10

Passo = 0,01

Cifre decimali (arrotondamento) = 4   Intorno   Leggimi   OK

x	f(x)
0	-2
0,01	-1,9796
0,02	-1,9584
0,03	-1,9364
0,04	-1,9137
0,05	-1,8902
0,06	-1,8659
0,07	-1,8409
0,08	-1,8151
0,09	-1,7887
0,1	-1,7615
0,11	-1,7336
0,12	-1,705

Esempio 2

Risolvere il seguente problema al bordo:

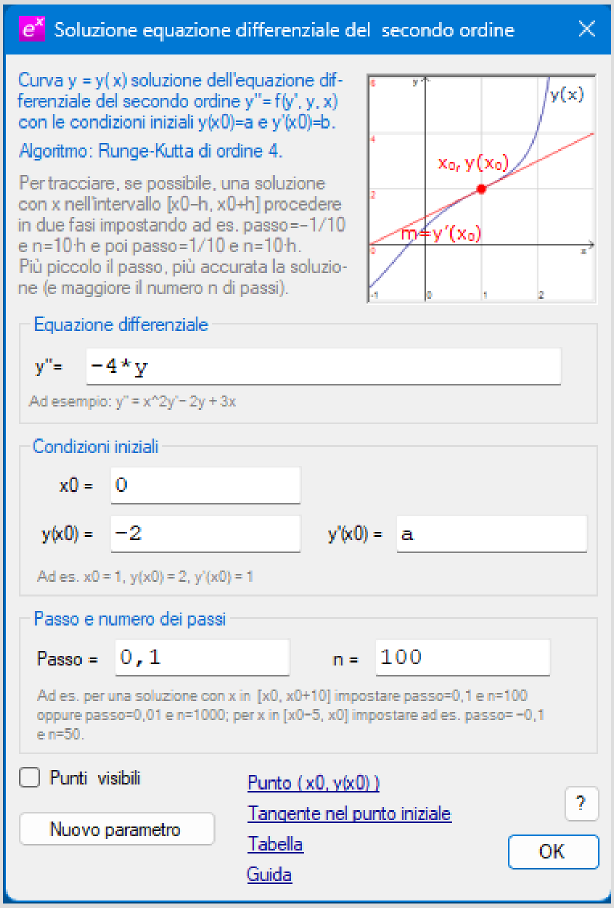
$$y'' = -4y, \quad y(0) = -2, \quad y(2\pi) = -2$$

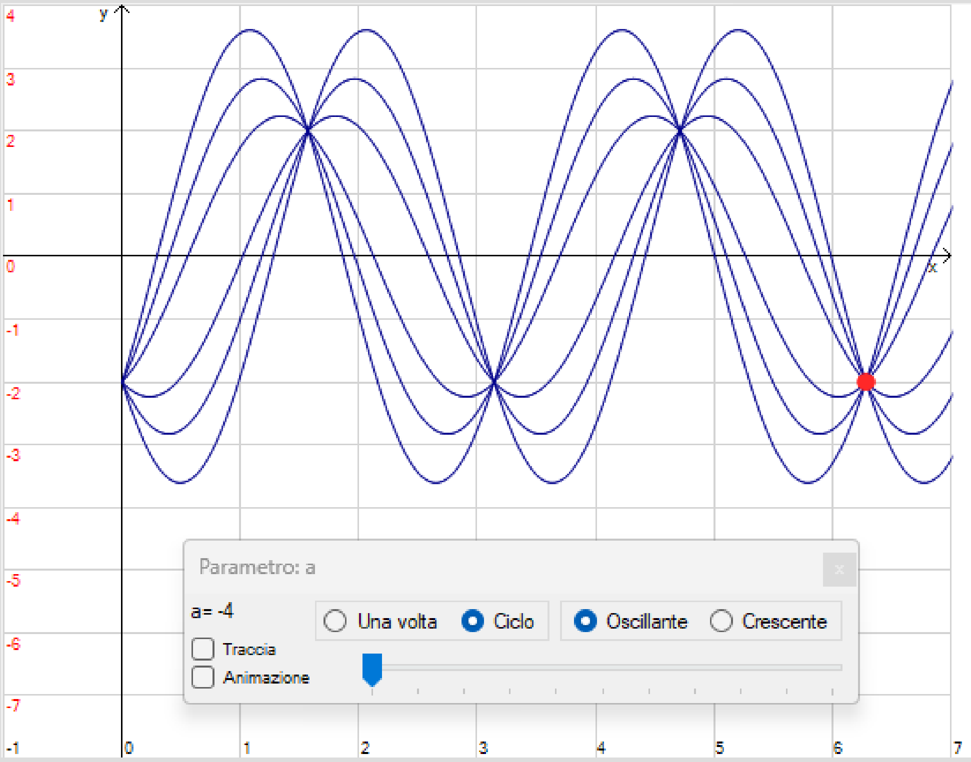
Si procede come nell'esempio1, la figura a fianco mostra la finestra d'impostazione e quella seguente mostra alcune delle infinite soluzioni.

Risolvendo in forma simbolica si hanno le soluzioni

$$-2\cos(2x) + c\,\sin(2x)$$

dove *c* è un parametro.





Esempio 3

Risolvere il seguente problema al bordo:

$$y'' = y'+y, \quad y'(1) = 1, \quad y'(2) = 3$$

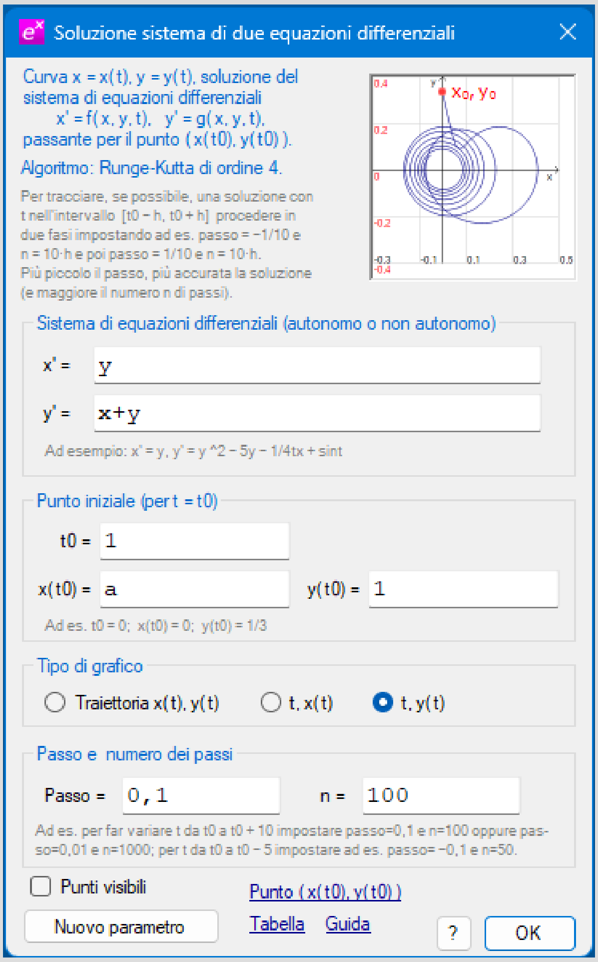
Ai nostri fini conviene riscrivere l'equazione differenziale data, in cui l'incognita è la funzione $y(x)$, usando per quest'ultima la notazione $x(t)$ (si può pensare che t rappresenti il tempo). Quindi il problema di partenza diventa

$$x''(t) = x'(t) + x(t), \quad x'(1)=1, \quad x'(2)=3$$

Se chiamiamo $y(t)$ la funzione $x'(t)$ possiamo trasformare l'equazione del secondo ordine, posta nella seconda forma, in un sistema di due equazione differenziali del primo ordine, in questo modo

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = y(t) + x(t) \end{cases}$$

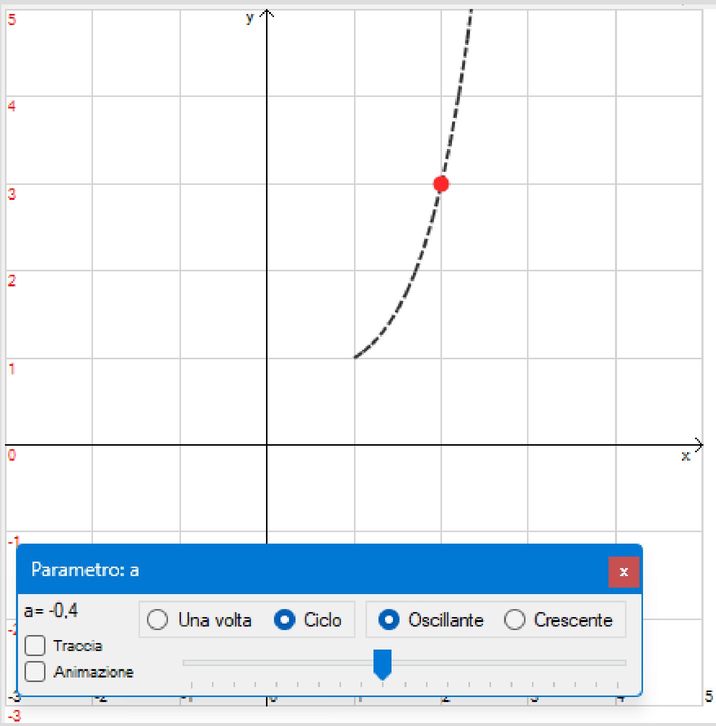
Ora risolveremo con EffeDiX il **problema di Cauchy** dato da tale sistema insieme alle condizioni iniziali $x(1)=a$ e $y(1)=1$; osservate che il tempo iniziale $t_0=1$ è lo stesso per le due condizioni, la prima condizione è libera di variare grazie al parametro a, la seconda condizione è proprio la prima condizione al bordo dato che $y(1)=x'(1)$. La figura seguente mostra la finestra di impostazione per il problema di Cauchy, l'opzione da utilizzare è *Calcolo – Sistema equazioni differenziali*.



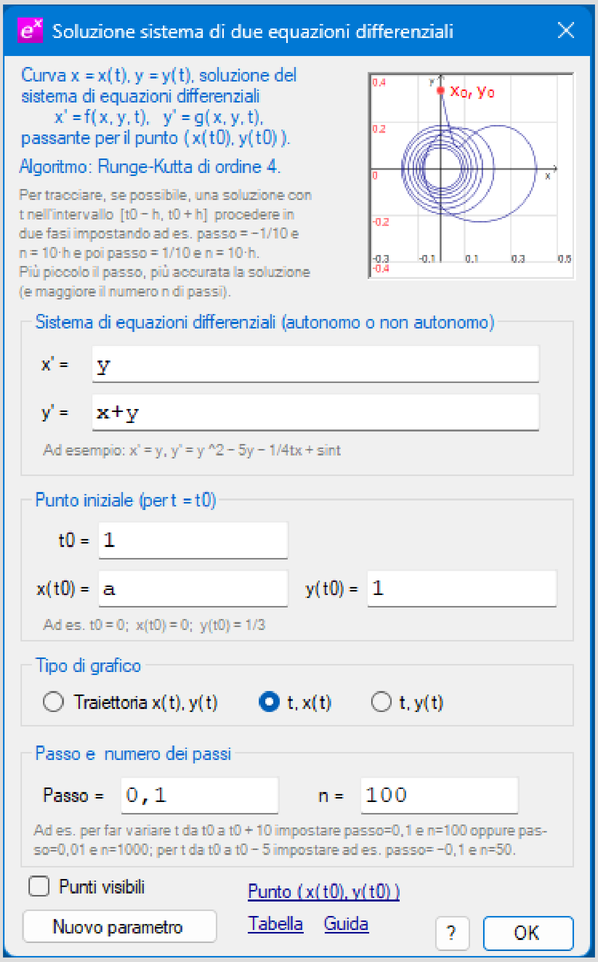
Osservare che il tipo di grafico preimpostato è *Traiettoria*, cioè il grafico della curva soluzione

x(t), y(t)=x′(t)

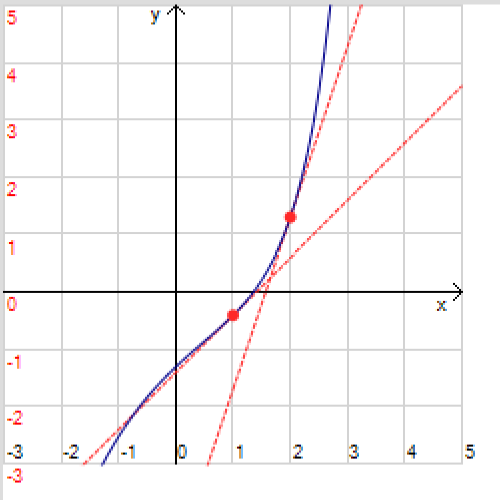
(soluzione del sistema nel piano delle fasi). A noi però interessa la funzione *y(t)=x′(t)* in funzione di *t*. Quindi faremo clic sul pulsante "radio" corrispondente a questo tipo di grafico (come vedi nella figura precedente) e tracceremo il grafico della funzione. Poi tracceremo il punto (2, 3) e faremo variare il parametro *a* fino a quando il grafico di *x′(t)* non passi per tale punto; ciò avviene approssimativamente per *a*=-0,4 (vedi schermata a fianco). In questo modo abbiamo determinato il valore del parametro tale che sia verificata anche la seconda delle condizioni al bordo cioè *x′(2)=3*.

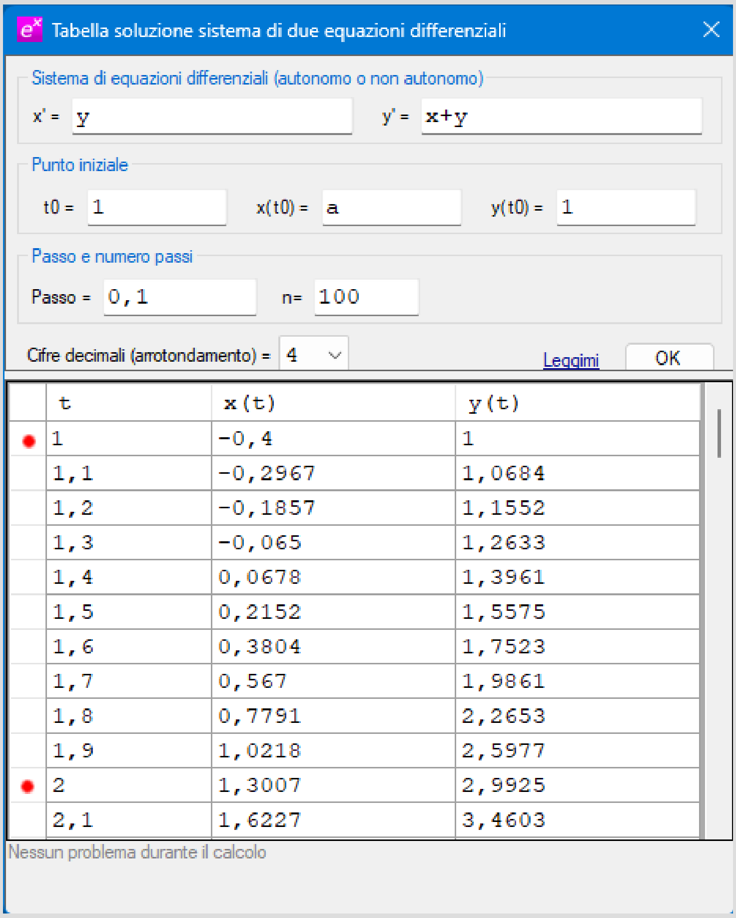


A questo punto potremo tracciare la soluzione *x(t)* che risolve il problema al bordo selezionando il tipo di grafico *x(t)* nella stessa finestra d'impostazione (vedi schermata a fianco). Tracceremo ad esempio la soluzione con passo 0,1 e poi con passo -0,1.



La schermata seguente mostra il grafico della soluzione in blu e, in rosso, le due tangenti alla soluzione in $t=1$ e in $t=2$ rispettivamente di pendenza 1 e 3. A fianco la tabella generata da EffeDiX per i valori di t, $x(t)$, $y(t)=x'(t)$.





	t	x(t)	y(t)
●	1	-0,4	1
	1,1	-0,2967	1,0684
	1,2	-0,1857	1,1552
	1,3	-0,065	1,2633
	1,4	0,0678	1,3961
	1,5	0,2152	1,5575
	1,6	0,3804	1,7523
	1,7	0,567	1,9861
	1,8	0,7791	2,2653
	1,9	1,0218	2,5977
●	2	1,3007	2,9925
	2,1	1,6227	3,4603

La soluzione simbolica calcolata con Mathematica è

-((E^(-1-sqrt(5)/2) (-9 E^((3 sqrt(5))/2+(1/2-sqrt(5)/2) x)-3 sqrt(5) E^((3 sqrt(5))/2+(1/2-sqrt(5)/2) x)+3 E^(1/2+2 sqrt(5)+(1/2-sqrt(5)/2) x)+sqrt(5) E^(1/2+2 sqrt(5)+(1/2-sqrt(5)/2) x)+2 E^(1/2+(1/2+sqrt(5)/2) x)-6 E^(sqrt(5)/2+(1/2+sqrt(5)/2) x)))/((1+sqrt(5))(-1+E^sqrt(5))))

ed è sovrapponibile a quella calcolata numericamente da EffeDiX (verificabile copiando l'espressione e incollandola nella finestra per tracciare un grafico di funzione).

Esempio 4

Risolvere il seguente problema al bordo:

$$y'' = y'+3y,\ \ y(1) = 3,\ \ y'(2) = 2$$

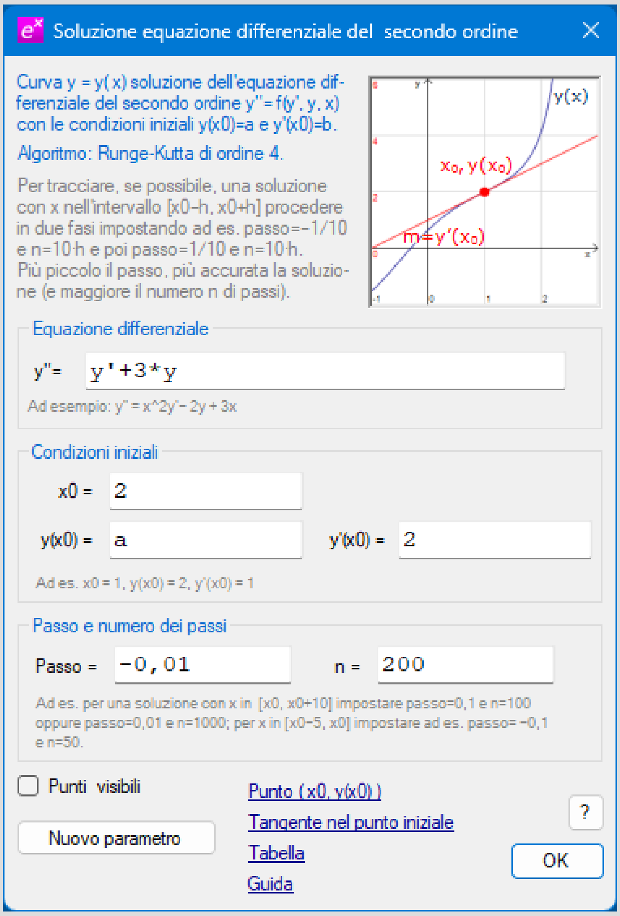
1) Tracciamo il punto (1, 3).

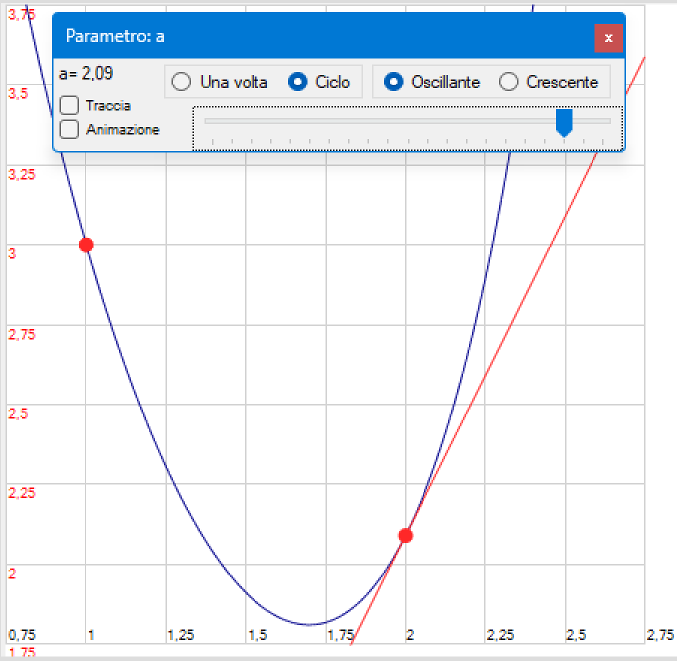
2) Tracciamo la soluzione relativa al problema di Cauchy

$$y'' = y'+3y,\ \ y(2) = a,\ \ y'(2) = 2$$

dove *a* è un parametro che faremo variare fino a quando la curva non passa per il punto (1, 3). Ciò avviene quando il parametro *a* è approssimativamente uguale a 2,09. Notare che la seconda condizione è la stessa del problema al bordo e la prima condizione è stata parametrizzata, in entrambi i casi il punto iniziale x_0 è uguale a 2.

Le figure a seguenti mostrano la finestra d'impostazione per il problema di Cauchy e la soluzione del problema al bordo. Per rappresentare la seconda condizione al bordo, è stata anche tracciata la tangente alla curva soluzione *y(x)* in *x=2*, cioè la retta di coefficiente angolare 2 passante per il punto *(2, y(2)=a)*.





La soluzione simbolica fornita da Mathematica

(E^(-1+x/2) (3 sqrt(13 E) cosh(1/2 sqrt(13) (-2+x))-3 sqrt(E) sinh(1/2 sqrt(13) (-2+x))+4 sinh(1/2 sqrt(13) (-1+x))))/(sqrt(13) cosh(sqrt(13)/2)+sinh(sqrt(13)/2))

è sovrapponibile a quella valutata numericamente da EffeDiX (verificabile copiando l'espressione e incollandola nella finestra per tracciare un grafico di funzione).