

Integrali doppi su domini il cui bordo è una curva semplice chiusa

EffeDiX può determinare **approssimazioni numeriche** di integrali doppi su domini il cui bordo è una curva parametrica semplice chiusa

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \text{ con } t \in [a, b]$$

(una curva semplice chiusa è una curva continua tale che il punto $(x(t), y(t))$ non torni mai su se stesso al variare di t con l'unica eccezione del punto di chiusura $\gamma(a)=\gamma(b)$). L'opzione da utilizzare è: *Calcolo – Integrale doppio – Su dominio il cui bordo è una curva chiusa parametrica*. E' inoltre possibile tracciare tale curva parametrica.

L'algoritmo utilizzato fornisce, in generale, valori accuratissimi. E' importante verificare che la funzione integranda $h(x,y)$ sia definita su tutto il dominio d'integrazione, in caso contrario il risultato fornito potrebbe non essere attendibile. La logica dell'algoritmo è la seguente: (1) si approssima la curva con un poligono con centinaia di lati, (2) si genera una triangolazione del poligono, (3) si usa l'algoritmo di quadratura *Dunavant 61* per integrare la funzione su ciascun triangolo (si valutano 61 punti interni al triangolo, ciascuno con un peso), (4) si sommano i risultati di tali integrazioni.

Esaminiamo alcuni esempi.

Esempio 1

Calcolare l'integrale

$$\iint_D x^2 y \, dx \, dy$$

dove D è il dominio di \mathbb{R}^2 il cui bordo è la curva chiusa

$$x(t) = 3^{\sin(2t)}, \quad y(t) = -\cos t \\ \text{con } \pi/2 \leq t \leq 3\pi/2$$

La figura a fianco mostra la finestra di impostazione.

Il risultato fornito da EffeDiX è 2,7025774 e si legge in basso nella parte grigia a sola lettura della finestra; l'ultima cifra viene, come al solito, arrotondata. Tale risultato è identico a quello che si ottiene con Mathematica (Wolfram).

Per tracciare la curva che individua il dominio utilizzare l'opzione *Traccia il bordo del*

Definizione dominio D d'integrazione

Il dominio è definito come bordo di una curva chiusa priva di autointersezioni di equazioni parametriche $x = x(t)$, $y = y(t)$ con t che varia nell'intervallo $[a, b]$.

$a = \pi/2$ $b = 3/2\pi$

$x(t) = 3^{\sin(2t)}$

$y(t) = -\cos t$

[Traccia il bordo del dominio](#) [Equazioni parametriche ellisse nota equazione cartesiana](#)
[Equazioni parametriche ellisse noti centro, semiassi e angolo di rotazione](#)


Funzione $h(x,y)$ da integrare sul dominio D

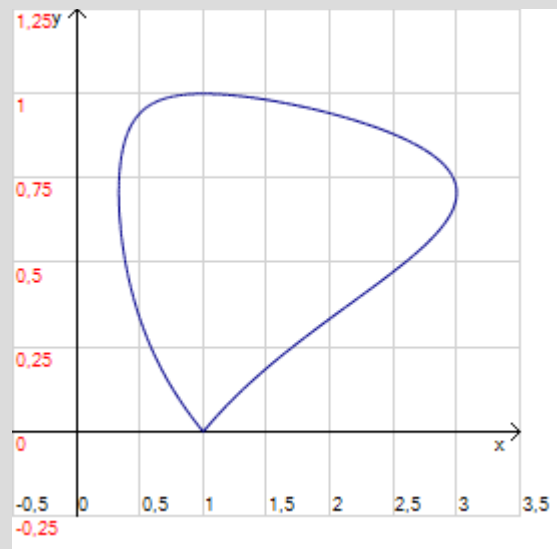
$h(x,y) = x^2 y$

Più accuratezza ESC per interrompere OK

$\iint_D h(x,y) dx dy = 2,7025774$

Attenzione: se la funzione $h(x,y)$ non è definita in punti del dominio D, i valori forniti potrebbero non essere attendibili

dominio che si trova nella stessa finestra di impostazione (vedi figura a fianco); poiché tale opzione interagisce con la finestra principale è opportuno non massimizzare quest'ultima in modo che tutte le finestre aperte restino in primo piano (comunque potete sempre richiamare l'ultima finestra aperta facendo clic sul pulsante  in alto a destra della finestra principale).



Esempio 2

Calcolare l'integrale

$$\iint_D (x^2 - xy^2) dx dy$$


dove D è il dominio di \mathbb{R}^2 il cui bordo è l'ellisse di equazione cartesiana

$$x^2 + xy + y^2/2 + x + 2y - 3 = 0$$

Il primo passo consiste nel ricavare le equazioni parametriche dell'ellisse, userete l'opzione *Oggetti grafici – Ellisse – Di equazione $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$* ; la figura a fianco mostra la finestra d'impostazione, dopo aver dato l'ok copierete le equazioni parametriche nei relativi campi a sola lettura.

Ora potrete integrare la funzione data, la figura seguente mostra la finestra d'impostazione. Il risultato fornito da EffeDiX, -941,692, coincide con quello fornito da Mathematica (Wolfram).

Se volete tracciare i punti interni all'ellisse (come in figura) utilizzate l'opzione *Oggetti grafici – Luogo di punti*.

 Ellisse di equazione $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
✕

Ellisse di equazione $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $B^2 - 4AC < 0$

A= <input type="text" value="1"/>	B= <input type="text" value="1"/>	C= <input type="text" value="1/2"/>
D= <input type="text" value="1"/>	E= <input type="text" value="2"/>	F= <input type="text" value="-3"/>

Coordinate (x_0, y_0) del centro

$x_0 =$ $y_0 =$

Misura semiassi (a=misura semiasse maggiore)

$a =$ $b =$

Angolo θ in radianti formato dal semiasse maggiore con la direzione dell'asse x

$\theta =$

Equazioni parametriche dell'ellisse (con t che varia da 0 a 2pi)

$x(t) =$

$y(t) =$

Integrale doppio su dominio il cui bordo è definito da una curva chiusa

Definizione dominio D d'integrazione

Il dominio è definito come bordo di una curva chiusa priva di autointersezioni di equazioni parametriche $x = x(t)$, $y = y(t)$ con t che varia nell'intervallo $[a, b]$.

$a = 0$ $b = 2\pi$

$x(t) = 4837 * \sin t * \sin 2,124370685692 + 1$
 $y(t) = 4837 * \sin t * \cos 2,124370685692 - 3$

[Traccia il bordo del dominio](#) [Equazioni parametriche ellisse nota equazione cartesiana](#)
[Equazioni parametriche ellisse noti centro, semiassi e angolo di rotazione](#)

Funzione $h(x,y)$ da integrare sul dominio D

$h(x,y) = x^2 - xy^2$

Più accuratezza ESC per interrompere OK

$\iint_D h(x,y) dx dy = -941,692$

Attenzione: se la funzione $h(x,y)$ non è definita in punti del dominio D, i valori forniti potrebbero non essere attendibili

Esempio 3

Calcolare l'integrale

$$\iint_D (x^2 y^3) dx dy$$

dove D è il dominio di \mathbb{R}^2 il cui bordo è l'ellisse di centro $(1, 1)$, semiassi maggiore e minore rispettivamente di lunghezze 2 e 1 e l'asse maggiore ruotato di 60° rispetto alla direzione orizzontale.

Il primo passo consiste nel ricavare le equazioni parametriche dell'ellisse, userete l'opzione *Oggetti grafici - Ellisse - Dati centro, semiassi, angolo di rotazione*; la figura a fianco mostra la finestra d'impostazione, dopo aver dato l'ok copierete le equazioni parametriche nei relativi campi a sola lettura.

Ora potrete integrare la funzione data, la figura seguente mostra la

Ellisse dati centro, semiassi, angolo di rotazione

Coordinate (x_0, y_0) del centro dell'ellisse

$x_0 = 1$ $y_0 = 1$

Misure a e b rispettivamente del semiasse maggiore e minore

$a = 2$ $b = 1$

Angolo θ , in radianti, di rotazione del semiasse maggiore rispetto alla direzione orizzontale

$\theta = \pi/3$

OK

Equazione cartesiana dell'ellisse

$0,8125x^2 - 0,649519052838xy + 0,4375y^2 - 0,975480947162x - 0,225480947162y - 0,399519052838 = 0$

Equazioni parametriche dell'ellisse (con t che varia da 0 a 2π)

$x(t) = 2 * \cos t * \cos 1,047197551197 - 1 * \sin t * \sin 1,047197551197 + 1$

$y(t) = 2 * \cos t * \sin 1,047197551197 + 1 * \sin t * \cos 1,047197551197 + 1$

finestra d'impostazione. Il risultato fornito da EffeDiX, 50,3399, coincide con quello fornito da Mathematica (Wolfram).

Se volete tracciare i punti interni all'ellisse (come in figura) utilizzate l'opzione *Oggetti grafici – Luogo di punti*.

e^x Integrale doppio su dominio il cui bordo è definito da una curva chiusa

Definizione dominio D d'integrazione

Il dominio è definito come bordo di una curva chiusa priva di autointersezioni di equazioni parametriche $x = x(t)$, $y = y(t)$ con t che varia nell'intervallo $[a, b]$.

a = b =

$x(t) = 97 - 1 * \sin t * \sin 1,047197551197 + 1$

$y(t) = 97 + 1 * \sin t * \cos 1,047197551197 + 1$

[Traccia il bordo del dominio](#) [Equazioni parametriche ellisse nota equazione cartesiana](#)
[Equazioni parametriche ellisse noti centro, semiassi e angolo di rotazione](#)

Funzione $h(x,y)$ da integrare sul dominio D

$h(x,y) =$

Più accuratezza ESC per interrompere

$\iint_D h(x,y) dx dy =$

Attenzione: se la funzione $h(x,y)$ non è definita in punti del dominio D, i valori forniti potrebbero non essere attendibili

