

Interpolazione polinomiale. Interpolazione soluzioni numeriche di equazioni differenziali

Esempio 1 (Interpolazione polinomiale di punti)

Determinare il polinomio che interpola i quattro punti $(-1; -5)$, $(0,5; 1,375)$, $(1; 1)$, $(1,5; 0,625)$ e tracciarne il grafico.

Dati n punti (x, y) con ascisse distinte, esiste, per un noto teorema, un unico polinomio **di grado minore o uguale ad $n-1$** che interpoli i punti dati (cioè un polinomio tale che il suo grafico passi per i punti dati).

L'opzione da utilizzare con EffeDiX è *Oggetti grafici – Polinomio interpolante punti*. Le figure seguenti mostrano la finestra d'impostazione e il grafico del polinomio; il polinomio interpolante si legge nel box grigio sotto la tabella. Per tracciare uno o più punti fare doppio clic sulla relativa riga della tabella.


Polinomio interpolante punti
✕

Determina l'unico polinomio $y = p(x)$, di grado $\leq n$, passante per gli $n+1$ nodi (x_i, y_i) indicati in tabella e ne traccia il grafico. Le ascisse dei nodi devono essere distinte. Numero massimo dei nodi: 12.

	x	y
	-1	-5
	0,5	1,375
	1	1
▶	1,5	0,625
*		

1+2x-3x^2+x^3

Canc. tutto

Canc. riga

Importa

OK

Doppio clic sulla riga per tracciare il punto



Esempio 2 (Interpolazione polinomiale di una funzione)

Interpolare la funzione

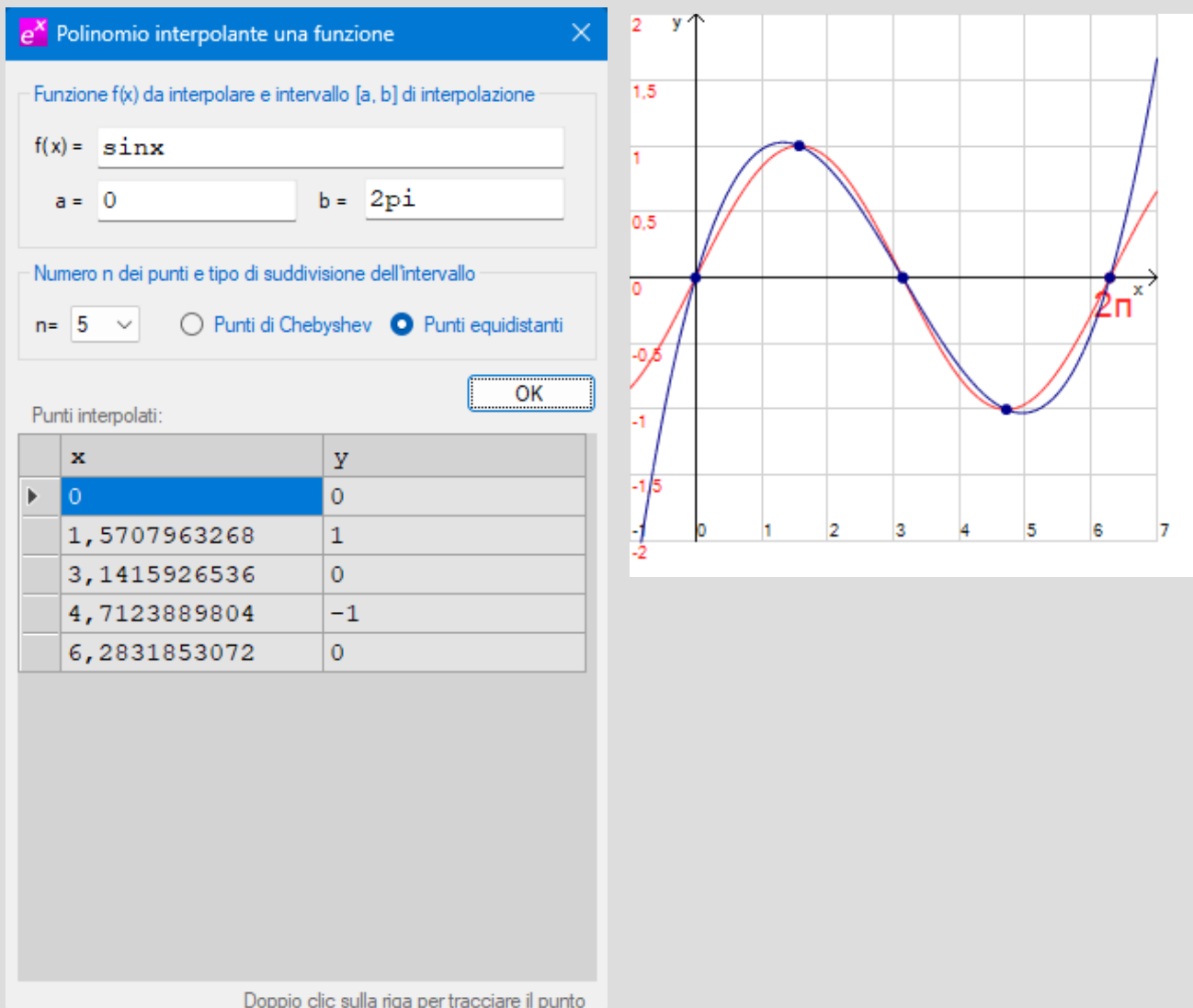
$$f(x) = \sin x$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$ scegliendo 5 punti $(x_i, f(x_i))$ con $i=1, 2, \dots, 5$.

L'opzione da utilizzare con EffeDiX è *Oggetti grafici – Polinomio interpolante una funzione*.

L'approssimazione di una funzione $f(x)$ mediante un polinomio interpolante $p(x)$ **dipende** in modo essenziale dal modo in cui vengono scelti i punti x_i nell'intervallo $[a, b]$ dato. EffeDiX consente due possibili scelte: suddivisione dell'intervallo in parti uguali (ascisse x_i equidistanti) oppure suddivisione dell'intervallo utilizzando punti di Chebyshev¹.

Le figure seguenti mostrano la finestra di impostazione nel caso della suddivisione dell'intervallo $[0, 2\pi]$ con punti di equidistanti e il grafico, in blu, del polinomio interpolante; in rosso è anche tracciata la funzione $f(x)=\sin x$ da interpolare.



Il polinomio interpolante fornito da EffeDiX, di terzo grado, è

$$p_1(x) = 1,697652726314 \cdot x - 0,810569469139 \cdot x^2 + 0,086004091822 \cdot x^3$$

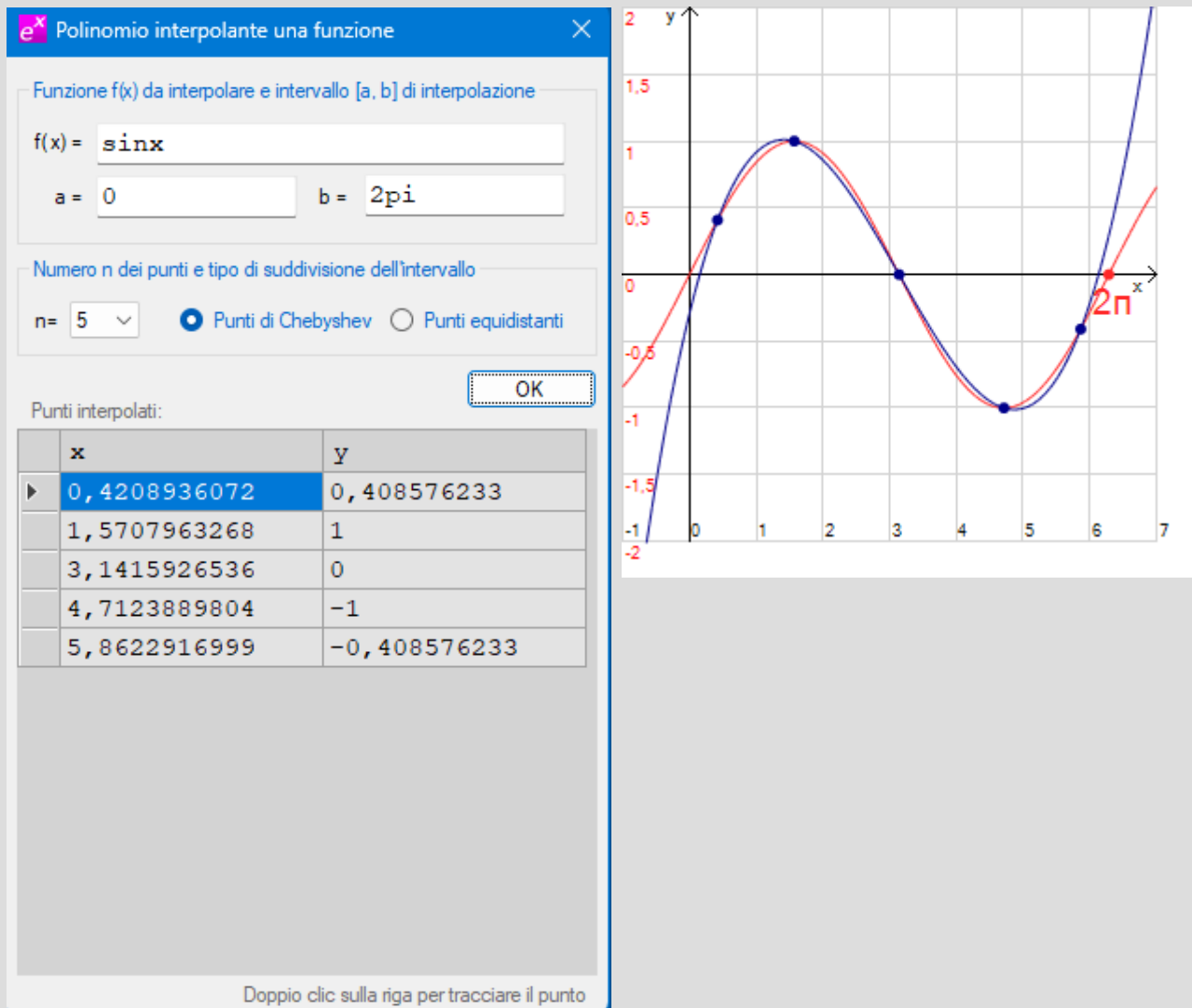
e viene inserito come oggetto *grafico di funzione* nel box degli oggetti grafici (per aprire la relativa finestra selezionare l'oggetto e fare clic col pulsante destro). Per tracciare i punti interpolati fare doppio clic sulle relative righe della tabella nella finestra d'impostazione. Come si vede, il polinomio $p_1(x)$ fornisce una discreta approssimazione della funzione $f(x)$. Si

¹ La suddivisione di Chebyshev dell'intervallo $[a, b]$ in n punti è data dai punti

$$x_i = (a+b)/2 + (b-a)/2 \cos(i \pi / (n+1)), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

potrebbe pensare che aumentando il numero n dei punti interpolati si ottengano approssimazioni via via migliori (nel nostro caso particolare, se fai delle prove, è così fino a $n=12$) ma in generale non è affatto detto, infatti all'aumentare del grado del polinomio possono aumentare le oscillazioni del grafico.

La figura seguente mostra la finestra di impostazione nel caso della suddivisione con punti di Chebyshev; in blu, come prima, il polinomio interpolante.



Il polinomio interpolante è questa volta

$$p_2(x) = -0,292325205624 + 2,038836070394 * x - 0,929044412509 * x^2 + 0,098574673735 * x^3$$

e anche ad occhio si vede che fornisce una miglior approssimazione di $\sin x$.

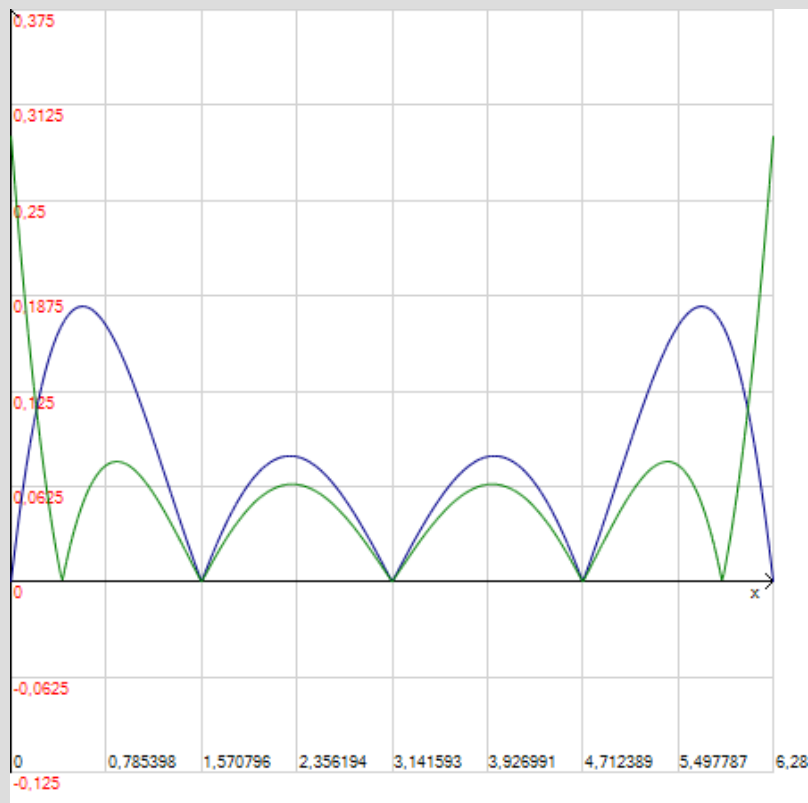
Volendo approfondire la questione di quale sia la miglior approssimazione potremmo considerare la funzione

$$\text{abs}(f(x) - p(x))$$

che rappresenta, punto per punto, la distanza tra il valore di $f(x)$ e il valore del polinomio approssimante $p(x)$ cioè rappresenta l'errore in funzione di x . La figura seguente mostra i grafici delle due funzioni di errore

$$\text{abs}(p_1(x) - \sin x) \quad \text{e} \quad \text{abs}(p_2(x) - \sin x)$$

sull'intervallo $[0, 2\pi]$, il primo in blu, il secondo in verde.



Una buona idea per valutare quale sia la **migliore approssimazione** di una funzione su un intervallo consiste nell'introdurre il concetto di **distanza tra funzioni**; una possibile definizione di distanza tra due funzioni continue $f(x)$ e $g(x)$ definite sull'intervallo $[a, b]$ è, come ci aspettiamo, la seguente

$$d(f, g) = \int_a^b |(f(x) - g(x))| dx$$

Una volta introdotta una nozione di distanza tra funzioni², il polinomio $p(x)$ che meglio approssima una funzione $f(x)$ sull'intervallo $[a, b]$ è il polinomio che **minimizza** la distanza $d(f, p)$. Un importante teorema dovuto a Chebyshev garantisce che il polinomio di grado n che meglio approssima una funzione continua $f(x)$ sull'intervallo $[a, b]$, assumendo come distanza tra funzioni la distanza $d(f, g)$ sopra definita, è il polinomio che interpola $f(x)$ sulla suddivisione di dell'intervallo $[a, b]$ in $n+1$ punti di Chebyshev (tale polinomio, sotto opportune ipotesi di regolarità per la funzione $f(x)$, è anche unico).

Verifichiamo, a titolo d'esempio, che la distanza del polinomio $p_2(x)$ dalla funzione $\sin x$ è **minore o uguale** della distanza del polinomio $p_1(x)$ dalla stessa funzione (come deve essere in forza del teorema appena citato).

² La nostra distanza $d(f, g)$ verifica le proprietà tipiche di una distanza

- (1) $d(f, g) = d(g, f)$
- (2) $d(f, g) = 0$ se e solo se $f = g$
- (3) $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$

e definisce uno spazio metrico delle funzioni continue sull'intervallo $[a, b]$. La distanza d non è naturalmente l'unica metrica possibile per lo spazio delle funzioni continue su $[a, b]$ ma sembra proprio quella più adatta al nostro scopo.

Le figure seguenti mostrano, nell'ordine, le due integrazioni.

e^x

Integrale definito

X

Funzione da integrare

f(x) = abs (-0,292325205624+2,038836070394 i)

Intervallo [a, b] di integrazione

a = 0

b = 2pi

Algoritmo

☐ Gauss-Legendre

☒ Simpson

☐ Trapezi

OK

$\int_a^b f(x)dx = 0,3491$

Accertarsi che la funzione sia limitata nell'intervallo di integrazione.

[Plurirettangolo](#)

[Somme di Riemann](#)

e^x Integrale definito ✕

Funzione da integrare

f(x) =

Intervallo [a, b] di integrazione

a = b =

Algoritmo

☐ Gauss-Legendre
 ☒ Simpson
 ☐ Trapezi

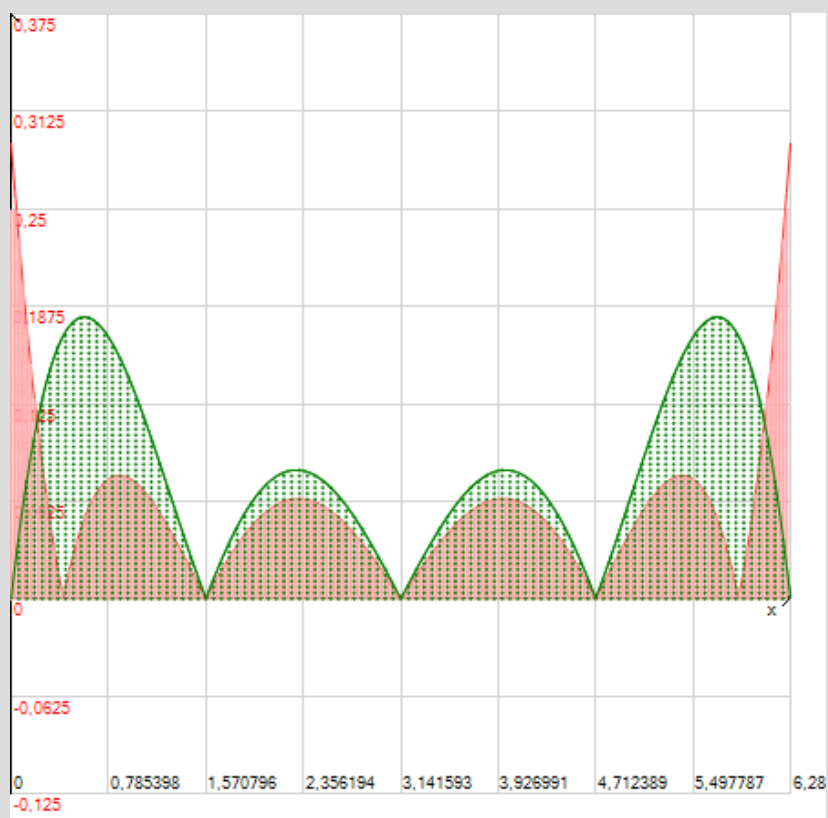
OK

$$\int_a^b f(x) dx =$$

Accertarsi che la funzione sia limitata nell'intervallo di integrazione.

[Plurirettangolo](#)
 [Somme di Riemann](#)

Le figure seguenti mostrano le due distanze come aree, in rosso $d(p_2(x), \sin x)$, in verde $d(p_1(x), \sin x)$.



Per tracciare le aree è stata utilizzata l'opzione *Oggetti grafici – Luogo di punti*.

Esempio 3 (Interpolazione della soluzione numerica di un'equazione differenziale)

Risolvere numericamente il problema di Cauchy

$$y' = y - x^3, \quad y(-1) = 1$$

e determinare il massimo assoluto della soluzione $y(x)$ nell'intervallo $[0, 4]$.

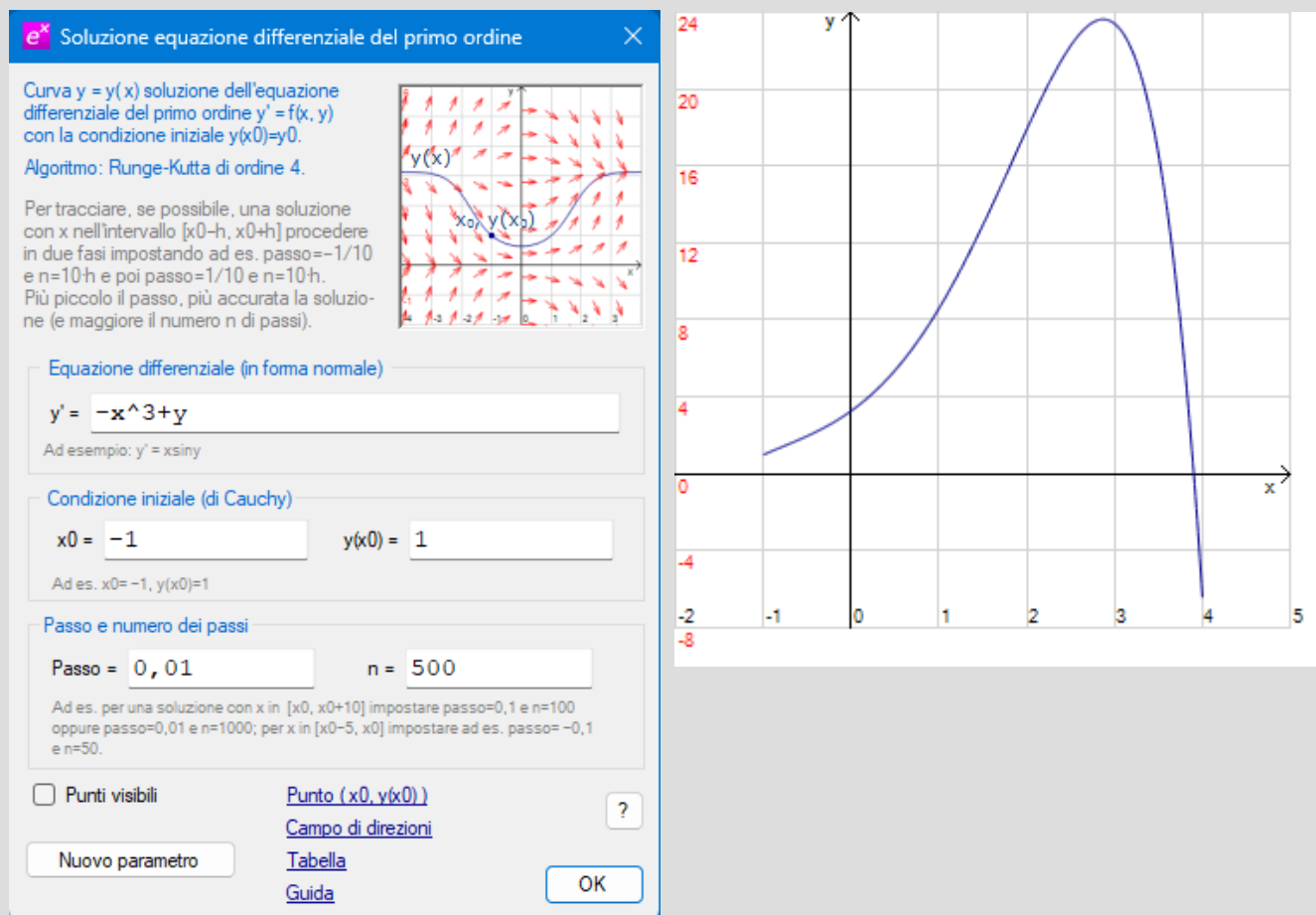
In questo caso possiamo determinare simbolicamente la soluzione $y(x)$ del problema

$$y(x) = -e^{1+x} + 6 + 6x + 3x^2 + x^3$$

e quindi procedere come al solito per determinare il massimo assoluto richiesto; tale massimo è 23,62822 (per trovare lo zero della derivata $y'(x)$ dobbiamo comunque utilizzare metodi numerici). Vediamo come procedere numericamente con EffeDiX.

Primo passo

Tracciamo il grafico della soluzione $y(x)$ nell'intervallo $[-1, 4]$. Tenendo conto che EffeDiX inizia a costruire la soluzione a partire da $x_0 = -1$, impostando un passo pari a 0,01, dovremo fare 500 passi (vedi figure seguenti).



Osservando il grafico di $y(x)$ ci rendiamo conto che il massimo assoluto viene raggiunto nell'intervallo $[0, 4]$ in corrispondenza del punto di massimo relativo compreso tra 2 e 3.

Secondo passo

Generiamo una tabella, molto accurata, per i valori $(x, y(x))$; per aprire la finestra d'impostazione basta fare clic sull'opzione *Tabella* che vedi in basso nella figura precedente.

Tabella soluzione equazione diff. del primo ordine

Equazione differenziale del primo ordine

$y' = -x^3 + y$

Condizione iniziale

$x_0 = -1$ $y(x_0) = 1$

Passo e numero passi

Passo = 0,001 n = 5000

Cifre decimali (arrotondamento) = 12 [Leggimi](#) OK

x	y (x)	
-1	1	☒
-0,999	1,001999500833	☐
-0,998	1,003998006666	☐
-0,997	1,005995522497	☐
-0,996	1,007992053323	☐
-0,995	1,009987604141	☐
-0,994	1,011982179946	☐
-0,993	1,013975785733	☐
-0,992	1,015968426496	☐
-0,991	1,017960107226	☐
-0,99	1,019950832916	☐
-0,989	1,021940608555	☐

Nessun problema durante il calcolo

Notare il passo di 1/1000 impostato in tabella e l'**accuratezza** dei valori $y(x)$ con 12 cifre decimali. Notare inoltre che a destra di ogni riga è presente una casella che indica se i valori della riga sono selezionati; potremo salvare su file tutta la tabella o solo i valori selezionati a seconda dello scopo con cui utilizzeremo questi dati.

Terzo passo

Apriamo il menu contestuale facendo clic col pulsante destro del mouse sulla tabella e poi facciamo clic sull'opzione *Seleziona punti per l'interpolazione*; si aprirà la finestra della figura a fianco. A cosa serve questa opzione? EffeDiX seleziona tra i punti in tabella, con ascisse appartenenti all'intervallo $[a, b]$, n punti (x, y) le cui ascisse meglio approssimano una suddivisione di Chebyshev di detto intervallo. Tali punti ci serviranno per determinare il polinomio interpolante, di grado $n-1$, che meglio approssima la soluzione $y(x)$ sull'intervallo $[a, b]$ (sulla questione del polinomio che fornisce la "miglior approssimazione" vedi l'esempio 2). Con le impostazioni $a=0$, $b=4$ e $n=12$, i punti selezionati sono quelli della figura a fianco.

Salviamo su file i punti selezionati utilizzando l'opzione del menu contestuale della tabella *Salva solo righe selezionate tabella su file (.txt)*.

Seleziona punti per l'interpolazione

Seleziona, tra i dati in tabella, n punti (x, y) le cui ascisse meglio approssimano n punti di Chebyshev nell'intervallo $[a, b]$

a= 0 b= 4 n= 12

[Annulla](#) [OK](#)

EffeDiX

Punti selezionati (suddivisione di Chebyshev dell'intervallo $[a, b]$):

(0,058; 3,4776830958)
 (0,229; 4,1255219722)
 (0,503; 5,4091362017)
 (0,864; 7,618977367)
 (1,291; 11,012910613)
 (1,759; 15,4946804764)
 (2,241; 20,2074582808)
 (2,709; 23,3375566884)
 (3,136; 22,608355392)
 (3,497; 16,6863868941)
 (3,771; 6,8753858291)
 (3,942; -2,5238048981)

[OK](#)

Quarto passo

Ora che abbiamo a disposizione 12 punti per l'interpolazione, utilizziamo l'opzione *Oggetti grafici – Polinomio interpolante – Polinomio interpolante punti*; facendo clic sul pulsante *Importa* nella finestra d'impostazione carichiamo il file .txt in cui sono stati salvati i dati. La figura a fianco mostra la finestra d'impostazione dopo il caricamento dei dati e dopo l'ok.

x	y
0,058	3,477683095815
0,229	4,125521972202
0,503	5,409136201667
0,864	7,618977367003
1,291	11,01291061...
1,759	15,49468047...
2,241	20,20745828...
2,709	23,33755668844
3,136	22,60835553...
3,497	16,68638689...
3,771	6,875385829086
3,846	0,588884888888

$3,281718672212+3,281704168496x+1,640973999704x^2+0,546519322667x^3-0,112352815047x^4-0,023819228129x^5-0,002807053008x^6-0,001072225928x^7+0,000127461833x^8-0,00005368316x^9+0,000005862658x^{10}-0,000000539858x^{11}$

Doppio clic sulla riga per tracciare il punto

Il polinomio interpolante, di grado n-1,

$$\begin{aligned}
 &3,281718672212+3,281704168496x+1,640973999704x^2+0,546519322667x^3 \\
 &-0,112352815047x^4-0,023819228129x^5-0,002807053008x^6 \\
 &-0,001072225928x^7+0,000127461833x^8-0,00005368316x^9+0,000005862658x^{10} \\
 &-0,000000539858x^{11}
 \end{aligned}$$

si legge in basso della finestra d'impostazione e viene inserito nel box degli oggetti grafici.

Utilizzando l'opzione *Oggetti grafici – Punto – Punto di massimo relativo* troveremo il valore cercato, cioè il massimo assoluto coincidente col massimo relativo, compreso tra 2 e 3, del polinomio interpolante:

23,62822

Punto x_0 di massimo relativo della funzione nell'intervallo dato. Selezionare un intervallo in cui cade un unico punto di massimo locale.

Per incollare la funzione selezionata: F8

Definizione della funzione $f(x)$

$f(x) = 3,281718672212+3,281704168496x+1,640973999704x^2+0,546519322667x^3-0,112352815047x^4-0,023819228129x^5-0,002807053008x^6-0,001072225928x^7+0,000127461833x^8-0,00005368316x^9+0,000005862658x^{10}-0,000000539858x^{11}$

Ad es. $f(x) = x \sin(x)^2$

Estremi dell'intervallo di ricerca ($a < b$)

$a = 2$ $b = 3$

Ad es. $a = 4, b = 6$

☐ Visualizza coordinate ? OK

Punto x_0 di massimo relativo e valore massimo $f(x_0)$ raggiunto

$x_0 = 2,869527$ $f(x_0) = 23,62822$

Esempio 4 (Interpolazione della soluzione numerica di un'equazione differenziale)

Risolvere numericamente il problema di Cauchy

$$y'' = xy + y', \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3$$

e approssimare l'integrale da -3 a -1 della soluzione $y(x)$. Determinare inoltre, nell'intervallo $[-3, -1]$, gli zeri della soluzione $y(x)$ e il suo punto di intersezione con la retta $y=x/3-1/3$.

1) Tracciamo la soluzione a partire da $x_0=1$ con passo negativo (vedi figure seguenti).

Soluzione equazione differenziale del secondo ordine

Curva $y = y(x)$ soluzione dell'equazione differenziale del secondo ordine $y'' = f(y', y, x)$ con le condizioni iniziali $y(x_0)=a$ e $y'(x_0)=b$.
 Algoritmo: Runge-Kutta di ordine 4.

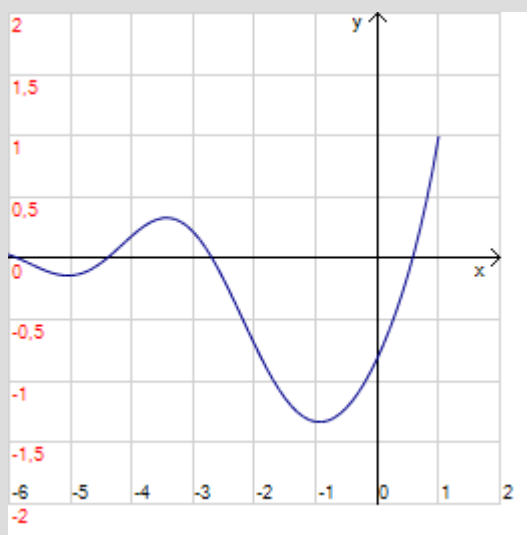
Per tracciare, se possibile, una soluzione con x nell'intervallo $[x_0-h, x_0+h]$ procedere in due fasi impostando ad es. passo=-1/10 e $n=10$ e poi passo=1/10 e $n=10$. Più piccolo il passo, più accurata la soluzione (e maggiore il numero n di passi).

Equazione differenziale
 $y'' = xy + y'$
 Ad esempio: $y'' = x^2y' - 2y + 3x$

Condizioni iniziali
 $x_0 = 1$
 $y(x_0) = 1$ $y'(x_0) = 3$
 Ad es. $x_0 = 1, y(x_0) = 2, y'(x_0) = 1$

Passo e numero dei passi
 Passo = -0,1 $n = 100$
 Ad es. per una soluzione con x in $[x_0, x_0+10]$ impostare passo=0,1 e $n=100$ oppure passo=0,01 e $n=1000$; per x in $[x_0-5, x_0]$ impostare ad es. passo=-0,1 e $n=50$.

☐ Punti visibili [Punto \(x0, y\(x0\)\)](#)
[Tangente nel punto iniziale](#)
[Tabella](#)
[Guida](#)



2) Generiamo una tabella molto accurata dei valori $(x, y(x))$ da $x_0=1$ fino a $x=-3$ (passo negativo).

Tabella soluzione equazione differenziale del secondo ordine

Equazione differenziale del secondo ordine
 $y'' = xy + y'$

Condizioni iniziali
 $x_0 = 1$ $y(x_0) = 1$ $y'(x_0) = 3$

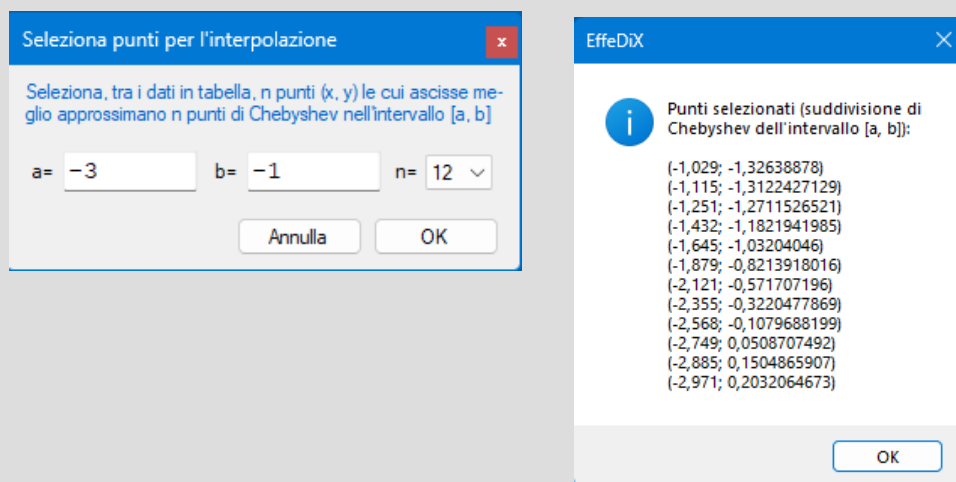
Passo e numero passi
 Passo = -0,001 $n = 4000$

Cifre decimali (arrotondamento) = 12 [Leggimi](#)

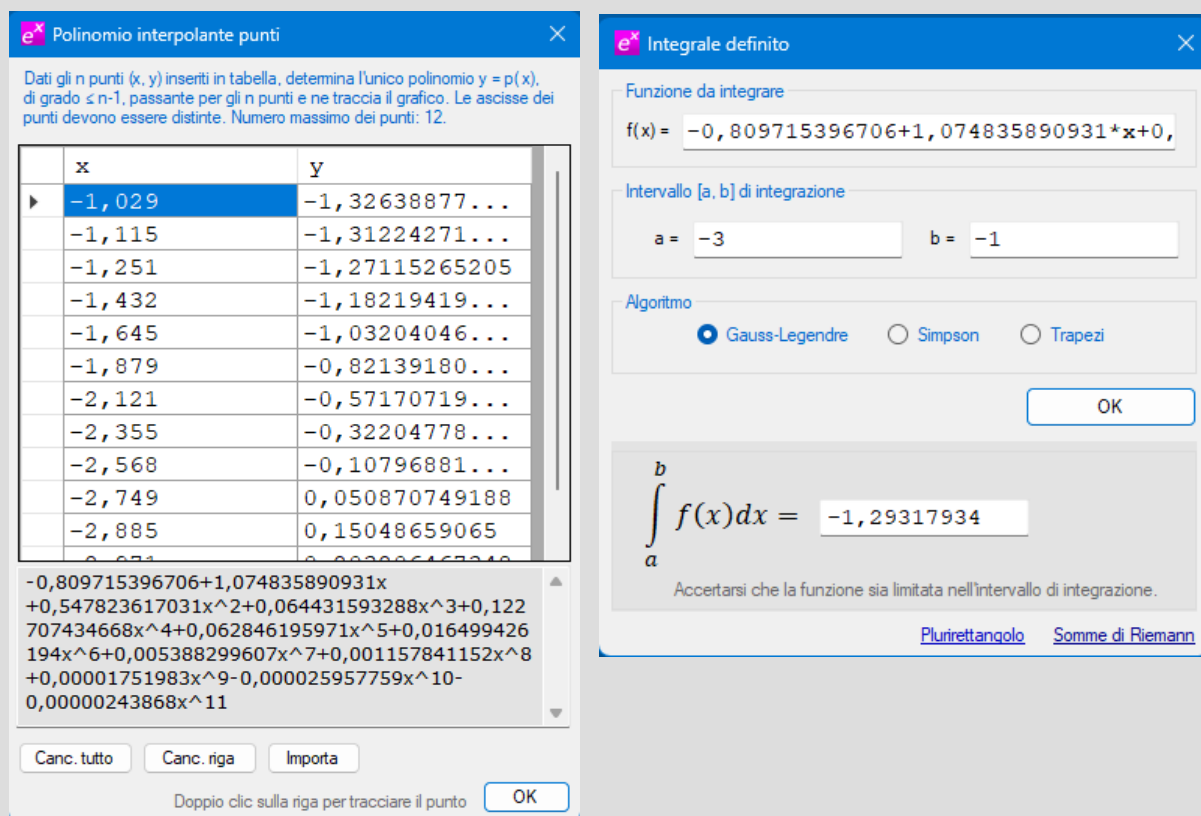
x	y (x)
1	1
0,999	0,997001998667
0,998	0,994007989345
0,997	0,991017964061
0,996	0,988031914858
0,995	0,985049833801
0,994	0,98207171297
0,993	0,979097544462
0,992	0,976127320395
0,991	0,973161032902
0,99	0,970198674135
0,989	0,967240236263

Nessun problema durante il calcolo

3) Selezioniamo i punti per l'interpolazione e salviamoli su un file di testo (clic col pulsante destro del mouse sulla tabella per aprire il menu contestuale).



4) Apriamo l'opzione *Oggetti grafici – Polinomio interpolante – Polinomio interpolante punti*. Facendo clic sul pulsante *Importa* nella finestra d'impostazione carichiamo il file .txt in cui sono stati salvati i punti per l'interpolazione e generiamo il polinomio interpolante. Integriamo infine il polinomio interpolante tra -3 e -1.



La soluzione $y(x)$ del nostro problema di Cauchy non è esprimibile mediante funzioni elementari, Mathematica (Wolfram) è in grado di determinare la soluzione simbolica per $y(x)$ utilizzando funzioni speciali di Airy; il valore dell'integrale fornito da Mathematica è -1.2931792.

La figura a fianco mostra la finestra d'impostazione per determinare lo zero di $y(x)$ nell'intervallo $[-3, -1]$; l'opzione da utilizzare è *Calcolo – Zeri di una funzione*. Il valore determinato da EffeDiX è $x = -2,687577$ (valore fornito da Mathematica $x = -2.6875769$).

Zeri della funzione $f(x)$

Zeri della funzione $f(x)$ ovvero soluzioni dell'equazione $f(x)=0$. La ricerca viene effettuata per x in un dato intervallo (a, b) in cui cade un unico zero. Ad es. nel caso in figura per determinare lo zero x_1 si può scegliere l'intervallo $(2, 4)$.

Per incollare la funzione selezionata: F8

Definizione della funzione $f(x)$

$f(x) = -0,809715396706+1,07483589093 1*x$

Intervallo di ricerca ($a < x < b$)

$a = -3$ $b = -1$

Algoritmo

☐ Bisezione ☒ Newton

☐ Visualizza valore OK

La figura a fianco mostra la finestra d'impostazione per determinare il punto di intersezione del grafico della soluzione $y(x)$, nell'intervallo $[-3, -1]$, con la retta di equazione $y=x/3-1/3$; l'opzione da utilizzare è *Oggetti grafici – Punto – Punto di intersezione di due grafici*. Il punto determinato da EffeDiX è $(-1,770943; -0,923648)$ e coincide con quello fornito da Mathematica.

Punto di intersezione di due grafici

Punto P di intersezione dei grafici delle funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$. La ricerca viene effettuata per x in un dato intervallo (a, b) in cui cade l'ascissa di un unico punto di intersezione.

Per determinare uno zero di $f(x)$ porre $g(x)=0$
Per incollare la funzione selezionata: F8

Definizione delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$

$f(x) = -0,809715396706+1,07483589093 1*x$

$g(x) = x/3-1/3$

Ad es. $f(x) = x^2/3$ e $g(x) = 1/x$

Intervallo di ricerca ($a < x < b$)

$a = -3$ $b = -1$

Ad es. $a=1, b=2$

Algoritmo

☐ Bisezione ☒ Newton

☐ Visualizza coordinate ? OK

