Sistemi dinamici discreti di dimensione uno

Sia I un intervallo, limitato o illimitato, di numeri reali e sia $f(x)$ una funzione di ***I* in *I***. Un *sistema dinamico discreto* di dimensione uno e di punto iniziale $x_0 \in I$ è una successione $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ di valori generati per iterazione della funzione f:

$$
\begin{aligned}
&x_0\\
&x_1 = f(x_0)\\
&x_2 = f(x_1) = f(f(x_0))\\
&x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0)))\\
&\dots\\
&x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Attenzione alla notazione, col simbolo $f^n(x_0)$ abbiamo indicato l'ennesima iterazione della funzione f:

$$f^1(x)=f(x),\ f^2(x)=f(f(x)),\ \dots$$

Chiameremo *orbita di* x_0 la successione $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

Diremo che l'orbita di un punto x_0 per iterazione della funzione $f(x)$ è *convergente* (*divergente*) se è convergente (divergente) la successione $x_n=f^n(x_0)$.

Scopo dello studio di un sistema dinamico è capire il comportamento di tale successione. Affronteremo la questione "per esempi" introducendo qualche semplice nozione e utilizzando EffeDiX. Assumeremo d'ora in poi che la funzione $f(x)$ sia derivabile nell'intervallo I in cui è definita.

Per una applicazione dei sistemi dinamici alla biologia (evoluzione di una popolazione di conigli) vedi Orbita 1D.

Esempio 1

Sia $f(x)=2x$ la funzione da iterare. Studiare l'orbita di $x_0=0$, di $x_0=1/2$ e di $x_0=-1$.

In questo caso possiamo esprimere mediante una **formula esplicita** l'ennesima iterazione x_n, infatti si ha:

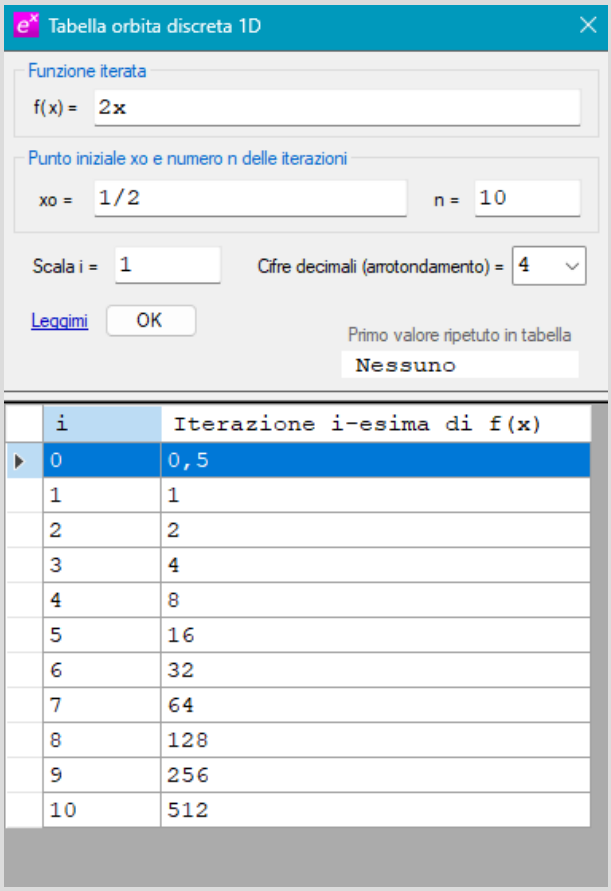
$$
\begin{aligned}
&x_1 = 2x_0\\
&x_2 = 2x_1 = 2^2x_0\\
&x_3 = 2x_2 = 2^3x_0\\
&\dots\\
&x_n = 2x_{n-1} = 2^nx_0\\
&\dots
\end{aligned}
$$

(quindi, ad es., per calcolare x_{20} non ho bisogno di calcolare tutti i valori precedenti $x_1, x_2, \dots, x_{19}$ ma posso semplicemente utilizzare la formula $x_{20} = 2^{20}x_0$).

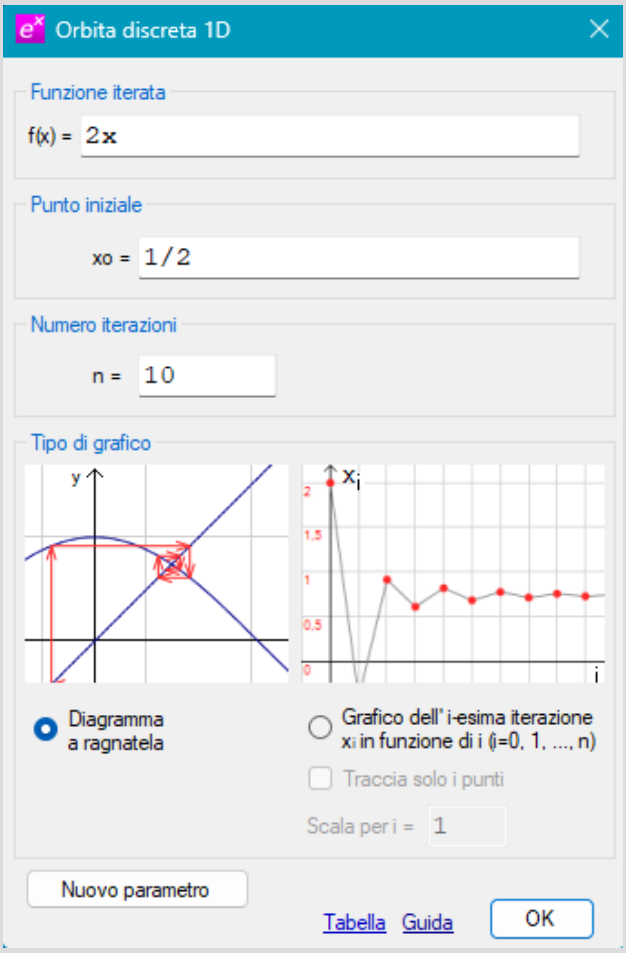
Ragionando sulla formula $x_n=2^n x_0$ è facile capire che l'orbita di $x_0=0$ è costantemente uguale 0, l'orbita di $x_0=1/2$ tende a $+\infty$, l'orbita di $x_0=-1$ tende a $-\infty$.

Osserviamo che nel nostro caso la funzione iterata è una funzione lineare del tipo $f(x)=mx$ con coefficiente angolare m **maggiore di 1**.

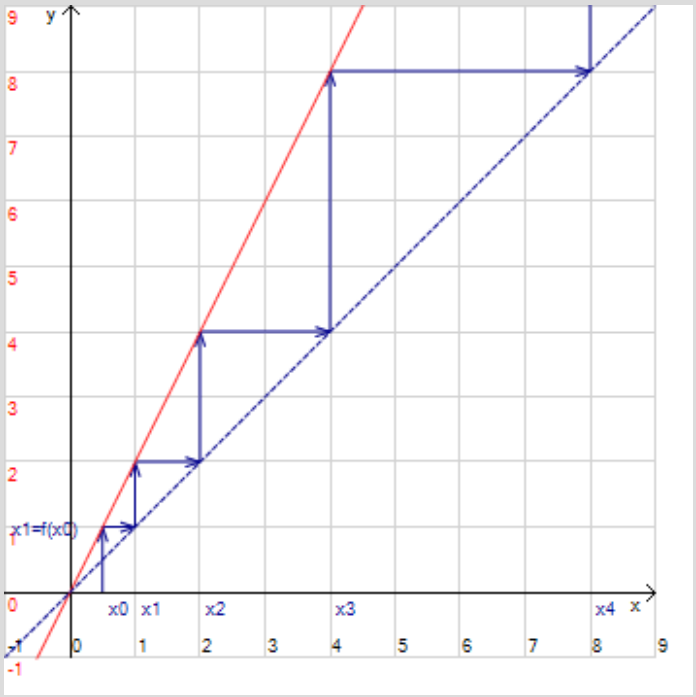
EffeDiX ci fornisce due rappresentazioni grafiche dell'orbita e una rappresentazione con tabella. Per generare una tabella selezioniamo l'opzione *Tabelle – Tabella orbita discreta 1D*. Nella figura a fianco vedete la tabella relativa alle prime 10 iterazioni di $f(x)=2x$ con punto iniziale $x_0=1/2$.

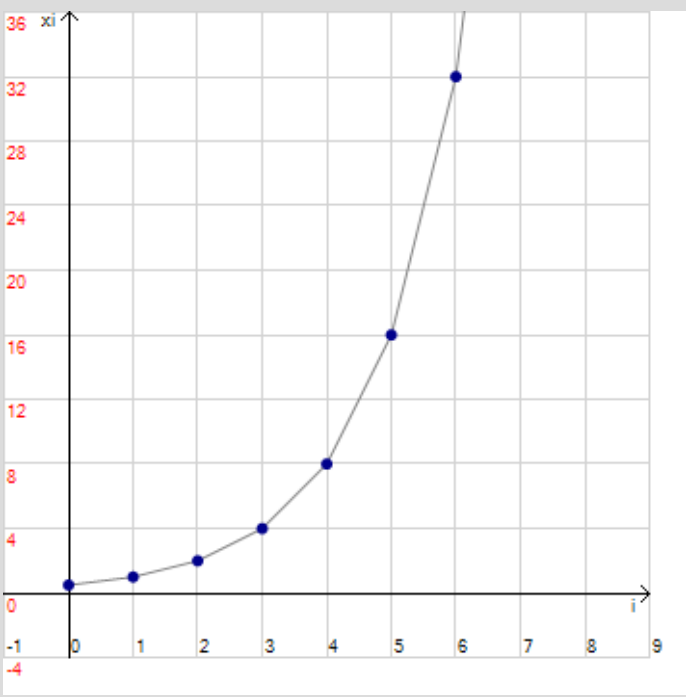


Per le rappresentazioni grafiche dell'orbita utilizzeremo l'opzione *Oggetti grafici – Orbita discreta 1D*. La figura a fianco mostra la finestra di impostazione che consente di scegliere il tipo di rappresentazione grafica: *Diagramma a ragnatela* oppure *Grafico dell'i-esima iterazione x_i in funzione di i.*



Le figure seguenti mostrano i due tipi di rappresentazione.





Nel primo caso sono stati tracciati anche il grafico della retta $f(x)=2x$ (in rosso) e il grafico della bisettrice del primo e terzo quadrante (tratteggiata). Il grafico a ragnatela è costruito in questo modo:

1) si traccia il vettore verticale da $(x_0, 0)$ fino al grafico della funzione cioè fino a $(x_0, f(x_0))$
2) si traccia il vettore orizzontale dal punto raggiunto cioè da $(x_0, f(x_0)=x_1)$ fino alla bisettrice cioè fino al punto (x_1, x_1)
3) si traccia di nuovo un vettore verticale dal punto raggiunto cioè da (x_1, x_1) fino al grafico della funzione cioè fino a $(x_1, f(x_1)=x_2)$
4) si traccia di nuovo un vettore orizzontale dal punto raggiunto cioè da $(x_1, f(x_1)=x_2)$ fino alla bisettrice cioè fino al punto (x_2, x_2)

… e così via.

L'orbita si può leggere in vari modi, ad esempio è costituita dalle ascisse (o dalle ordinate) dei punti individuati sulla bisettrice. La cosa interessante è che questo tipo di grafico ci consente, in molte situazioni, di capire **geometricamente** come si evolverà l'orbita, ad esempio nel nostro caso si capisce che i punti sulla bisettrice si allontaneranno **necessariamente** sempre più dall'origine rimanendo nel primo quadrante, dunque l'orbita divergerà positivamente.

Prima di passare al prossimo esempio è opportuno introdurre la nozione di ***punto fisso***. Diremo che x^* è un *punto fisso* per la funzione $f(x)$ se si ha $f(x^*)=x^*$ oppure, equivalentemente, se x^* è una soluzione dell'equazione $f(x)=x$. Graficamente i punti fissi di $f(x)$ sono le ascisse dei punti di intersezione del grafico di $f(x)$ con la bisettrice

del primo e terzo quadrante. Ad esempio nel caso della funzione $f(x)=2x$ esaminata nell'esempio precedente l'unico punto fisso è $x^*=0$.

Una proprietà fondamentale dei sistemi dinamici è la seguente: se l'orbita di un punto x_0 è **convergente** allora l'orbita converge necessariamente ad un **punto fisso**[1].

Esempio 2

Sia $f(x) = mx$ la funzione da iterare. Studiare l'orbita di un generico punto x_0 al variare del parametro m.

Prima di tutto determiniamo i punti fissi. Si ha

$$mx = x \quad \text{cioè} \quad x(m-1) = 0$$

se $x=0$ oppure $m=1$. Quindi se $m \neq 1$ l'unico punto fisso è $x=0$, se $m=1$ ogni x è fisso. Ne segue che nel caso di $m \neq 1$, se l'orbita di un qualsiasi punto x_0 converge allora converge **necessariamente** a 0.

In modo analogo a quanto si è già visto nell'esempio 1, l'ennesima iterazione della funzione $f(x)=mx$ di punto iniziale x_0 può essere espressa mediante una formula esplicita

$$f^n(x_0) = m^n x_0$$

Ne segue che il comportamento dell'orbita di x_0 è riconducibile ai seguenti casi:

1) se $x_0=0$, qualunque sia il valore di m, l'orbita converge a 0 (è costantemente uguale a 0);

2) se $|m| > 1$, cioè *se* $m > 1$ oppure $m < -1$, allora l'orbita diverge in valore assoluto qualunque sia $x_0 \neq 0$ (cioè diverge oppure diverge oscillando tra valori positivi e negativi, fate qualche esperimento generando delle tabelle con EffeDiX);

3) se $|m| < 1$, cioè *se* $-1 < m < 1$, allora l'orbita converge a 0 qualunque sia x_0 (se $-1<m<0$ l'orbita converge a 0 oscillando tra valori positivi e negativi, fate qualche esperimento generando delle tabelle con EffeDiX);

4) se $m=1$, f è la funzione identica, ogni punto x_0 è un punto fisso e l'orbita converge a x_0 (è costantemente uguale a x_0);

5) se $m=-1$ l'orbita diventa periodica nel nostro caso oscillando tra i due valori x_0 e $-x_0$:

---

1 Dimostrazione: per ipotesi l'orbita $x_n = f^n(x_0)$ converge a un dato valore reale x^*; ne segue

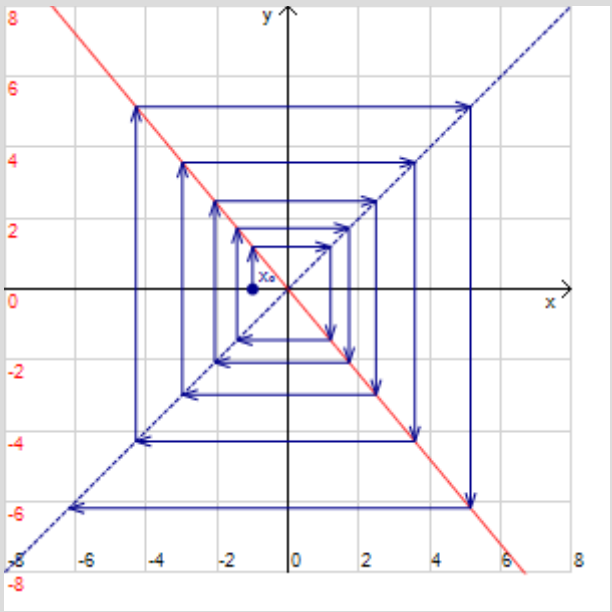
$$f(x^*) = \lim_{n \to +\infty} f(f^n(x_0)) = \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = x^*$$

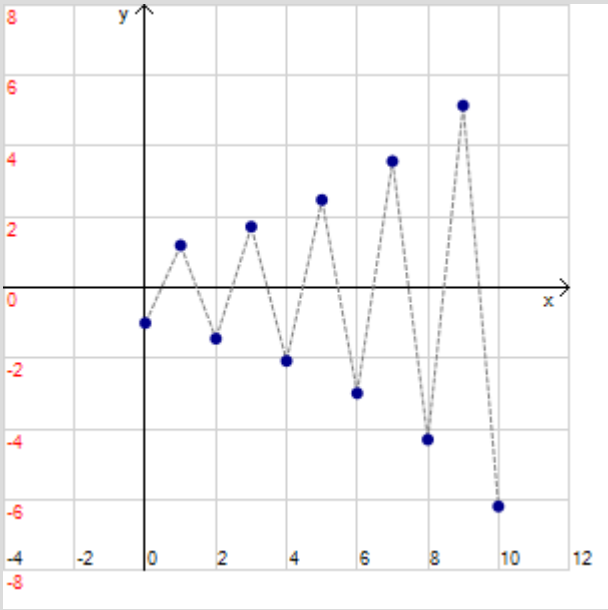
dove si è sfruttata la continuità di f.

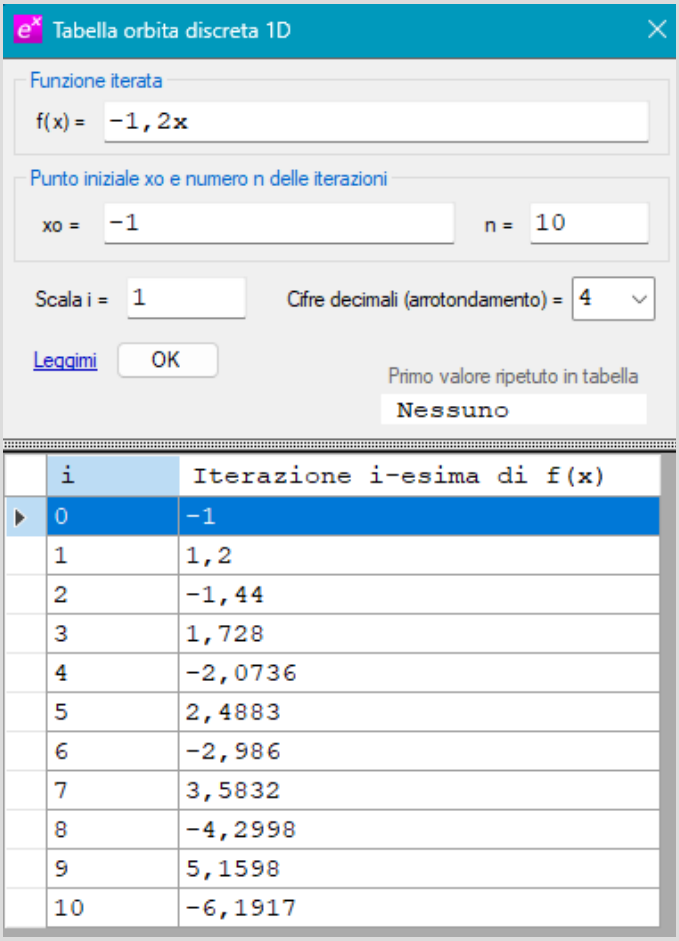
$\{x_0, -x_0, x_0, -x_0, \ldots\}$

Seguono diagrammi a ragnatela, grafici dell'i-esima iterazione e tabelle relativi ad **alcune** delle situazioni della casistica precedente (per altre fate voi degli esperimenti, la cosa ideale è dichiarare due parametri, uno per *m* e uno per x_0).

<u>Caso 2: divergenza in valore assoluto</u> (m=-1,2; x_0=-1; 10 iterazioni)

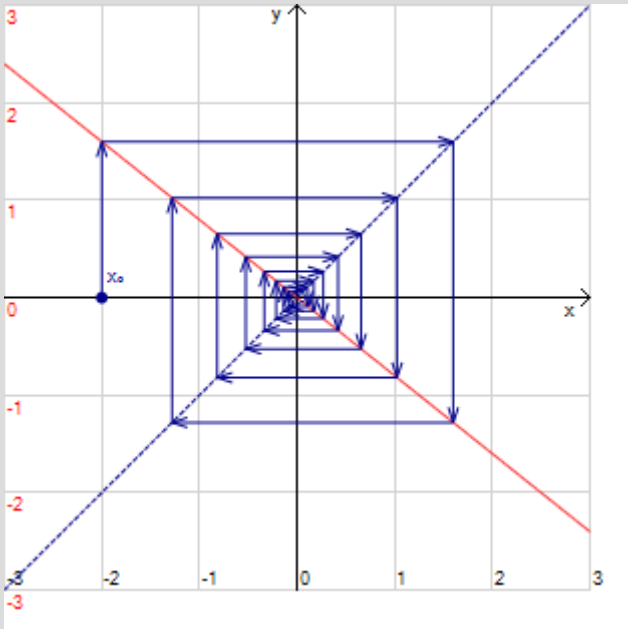


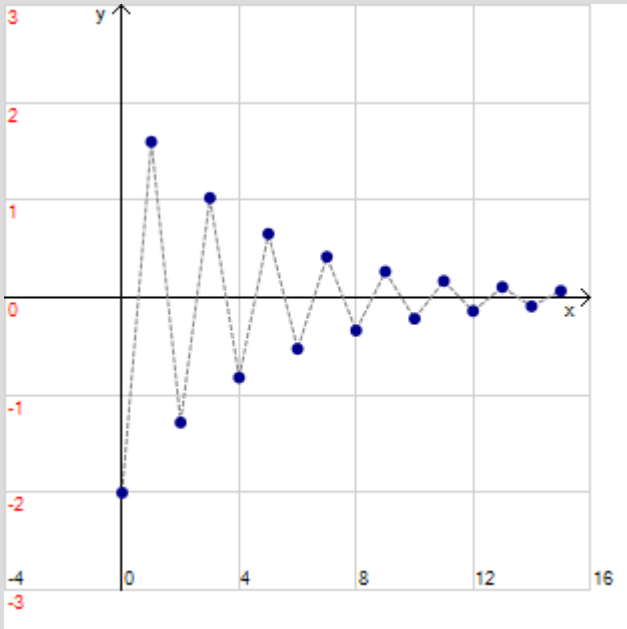


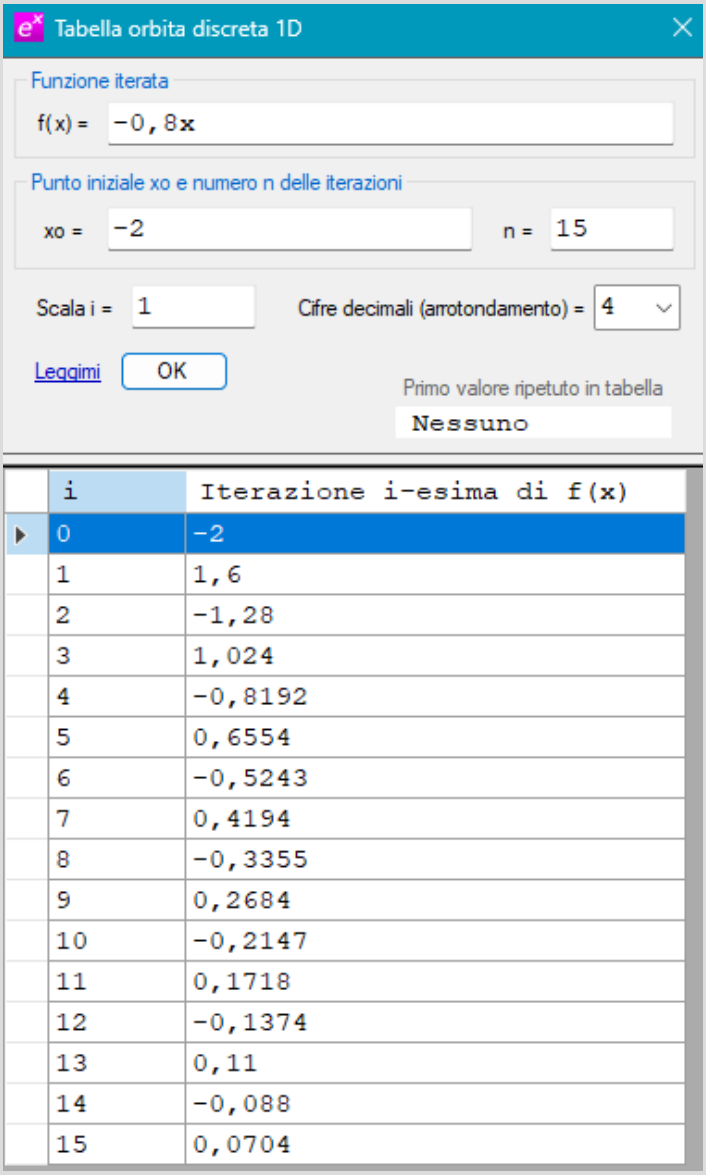


i	Iterazione i-esima di f(x)
0	-1
1	1,2
2	-1,44
3	1,728
4	-2,0736
5	2,4883
6	-2,986
7	3,5832
8	-4,2998
9	5,1598
10	-6,1917

Caso 3: convergenza a 0 (m=-0,8; x_0=-2; 15 iterazioni)

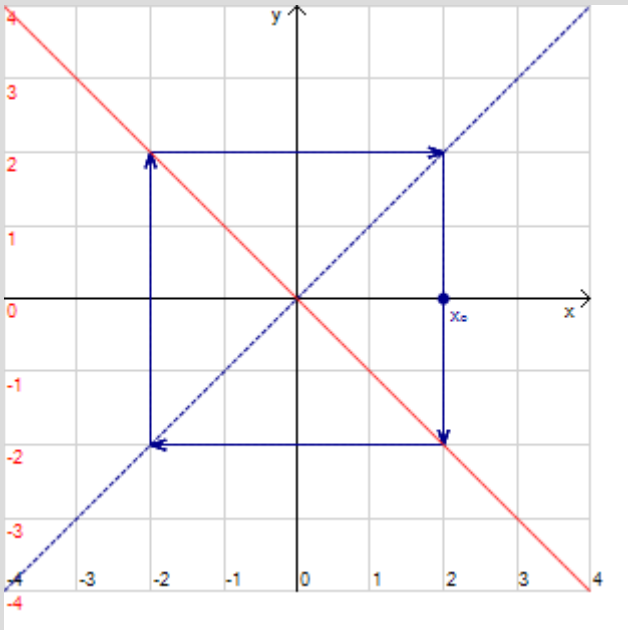


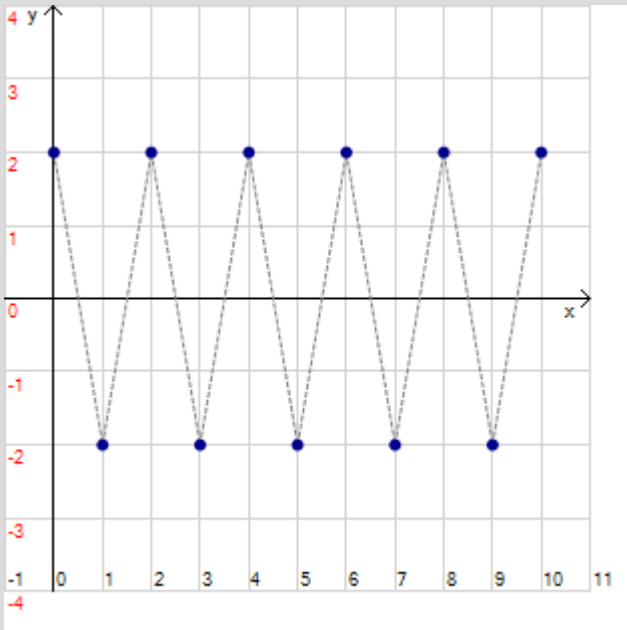


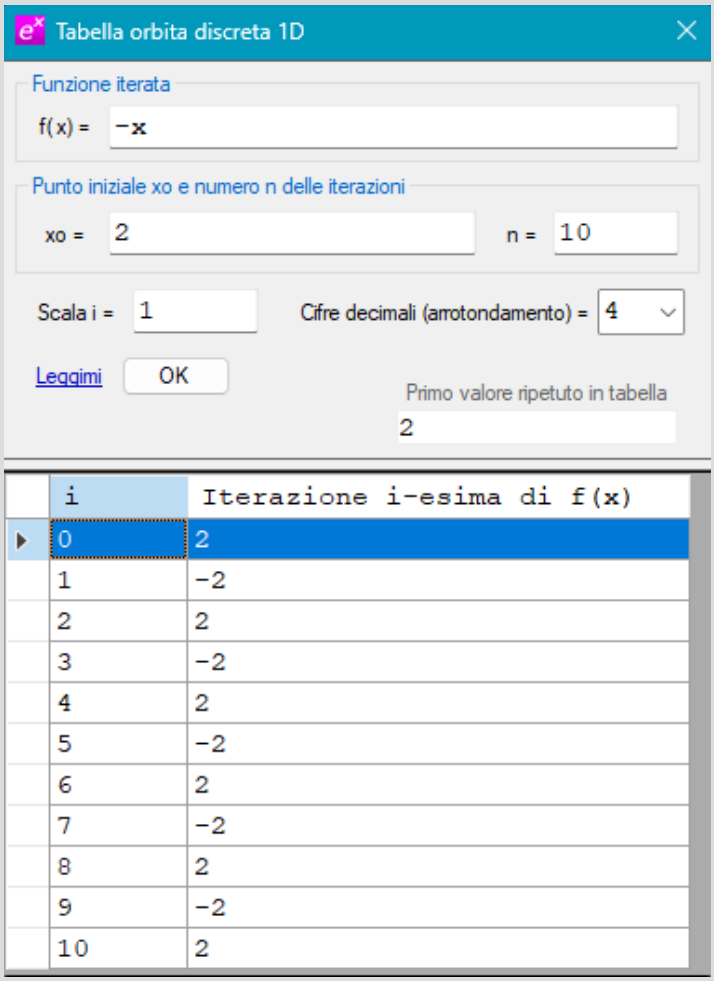


i	Iterazione i-esima di f(x)
0	-2
1	1,6
2	-1,28
3	1,024
4	-0,8192
5	0,6554
6	-0,5243
7	0,4194
8	-0,3355
9	0,2684
10	-0,2147
11	0,1718
12	-0,1374
13	0,11
14	-0,088
15	0,0704

Caso 5: orbita periodica (m=-1; x_0=2; 10 iterazioni)







i	Iterazione i-esima di f(x)
0	2
1	-2
2	2
3	-2
4	2
5	-2
6	2
7	-2
8	2
9	-2
10	2

Osservate che EffeDiX determina il primo valore che si ripete nella tabella, nel nostro caso 2, e lo visualizza nel campo a sola lettura in basso a destra.

Il quinto caso dell'esempio precedente ci mostra un nuovo importante tipo di orbita cioè un'orbita **periodica**. Un'orbita si dice *periodica* (o *ciclica*) se dopo un certo numero di iterazioni ritorna al punto di partenza o equivalentemente, se esiste un intero positivo n tale che

$$f^n(x_0) = x_0$$

Il punto x_0 si dice in questo caso punto *periodico* (o *ciclico*) di periodo n. Se n è il più piccolo intero che verifica questa condizione si dice che n è il *periodo minimo*.

Osserviamo che un punto di periodo n è anche periodico di periodo $k \cdot n$ con k intero positivo qualsiasi (banalmente un punto di periodo 2 è anche di periodo 4, 6, 8, …).
Tenete presente che un punto fisso x_0 per la funzione $f(x) = f^1(x)$ è un punto ciclico di periodo 1 e quindi ciclico di qualsiasi periodo.

Osserviamo inoltre che se x_0 è di periodo n allora x_0 è un punto **fisso** per la funzione $f^n(x)$. Ad esempio per verificare se l'orbita generata per iterazione della funzione $f(x) = mx$, esaminata nell'esempio precedente, ha punti ciclici di periodo 2, dobbiamo verificare se l'equazione

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)) = m(mx_0) = m^2x_0 = x_0$$

ha soluzioni. Le soluzioni sono $x_0=0$ (per ogni m) oppure $m=\pm 1$ (per ogni x_0). Ritroviamo così quanto già sappiamo:

1) $x_0=0$ è un punto fisso (quindi ciclico di qualsiasi periodo, quindi anche ciclico di periodo 2) qualunque sia il valore di m;
2) se $m=1$, qualsiasi x_0 è un punto fisso (quindi ciclico di qualsiasi periodo);
3) se $m=-1$, qualsiasi $x_0 \neq 0$ è un punto ciclico di periodo minimo 2.

Osserviamo infine che un'orbita pur non essendo periodica può essere *definitivamente periodica* cioè dopo un certo numero di iterazioni iniziali (preperiodo) diventa periodica. Ad esempio consideriamo l'iterazione della funzione $f(x)=1-2|x-1/2|$ (mappa a tenda):

1) l'orbita di punto iniziale $x_0=1/4$ è definitivamente periodica di periodo 1:

1/4, 1/2, 1, 0, 0, 0, …

2) l'orbita di punto iniziale $x_0=1/5$ è definitivamente periodica di periodo 2:

1/5, 2/5, 4/5, 2/5, 4/5, 2/5, 4/5, ...

Il prossimo esempio ci mostrerà altri aspetti interessanti.

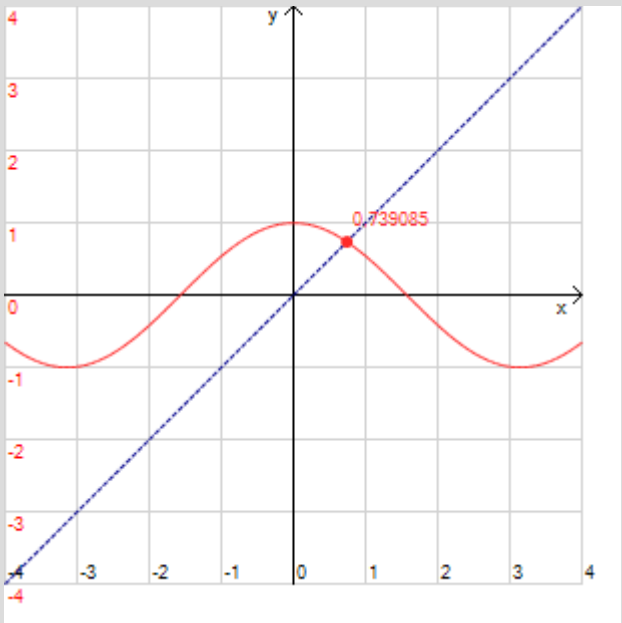
Esempio 3

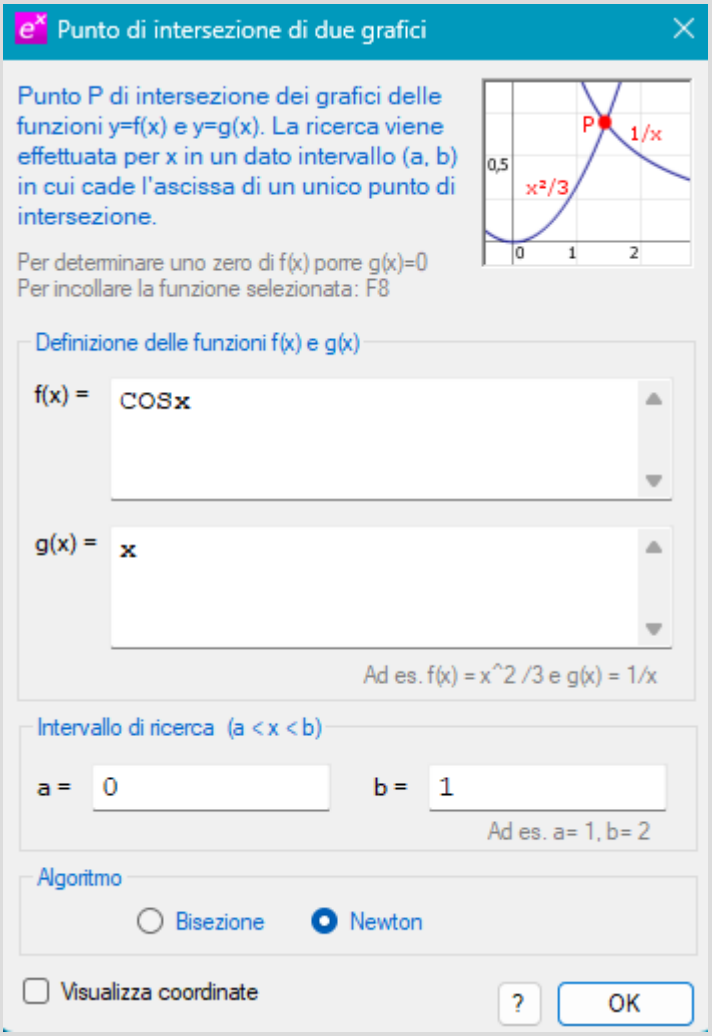
Sia $f(x) = cosx$ la funzione da iterare. Studiare l'orbita di un generico punto x_0.

Al contrario di quanto fatto nell'esempio precedente **non** siamo in questo caso in grado di esprimere mediante una formula esplicita l'ennesima iterazione $f^n(x_0)$. In realtà nella maggior parte dei casi **non** sarà possibile trovare una tal formula. Inoltre per determinare gli eventuali punti fissi dovremmo risolvere l'equazione

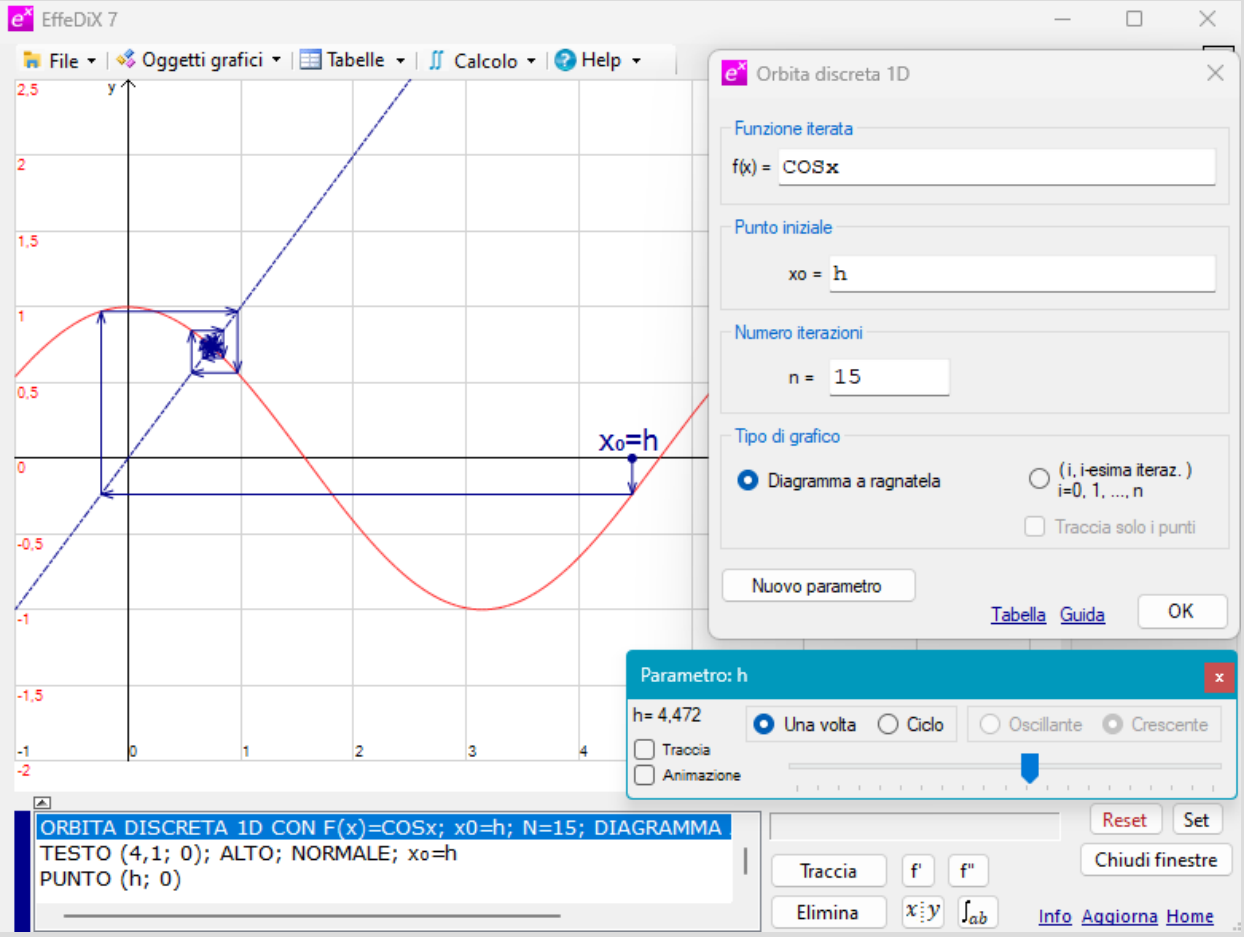
$$cosx = x$$

per la quale **non** siamo in grado di trovare soluzioni **simboliche**. D'altra parte, osservando i grafici della figura seguente, ci rendiamo conto che esiste un'unica soluzione reale dell'equazione; potremo determinarla **numericamente** utilizzando l'opzione *Oggetti grafici - Punto – Punto di intersezione di due grafici*. Il valore approssimato fornito da EffeDiX è 0,739085.

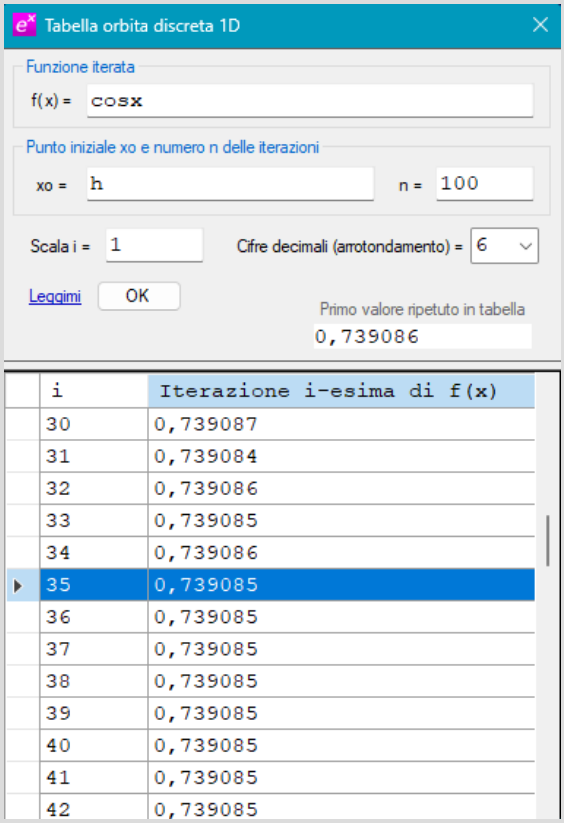




Dunque abbiamo determinato l'unico punto fisso $x^* \approx 0{,}739085$. Ora si tratta di capire come si evolvono le orbite, sappiamo che se convergenti, convergeranno necessariamente a x^*. Conviene generare un diagramma a ragnatela, dichiarando un parametro h per x_0. In tal modo potremo far variare gradualmente il parametro h e vedere quello che succede (vedi figura seguente).



Cliccando qui potrete vedere il video del diagramma a ragnatela in animazione (il parametro *h* varia da 0 a 8 con 1000 intervalli) e cliccando qui il video del grafico dell'ennesima iterazione in animazione (il parametro *h* varia da -1 a 1 con 1000 intervalli). Osservando i diagrammi ci rendiamo conto che l'orbita converge al punto fisso $x^* \approx 0{,}739085$ **qualsiasi sia il punto iniziale x_0**, il punto fisso "attrae" qualsiasi orbita. La figura a fianco mostra ad esempio la tabella dell'orbita di punto iniziale *h=1*: dopo qualche decina di iterazioni l'orbita si stabilizza sul valore 0,739085.



i	Iterazione i-esima di f(x)
30	0,739087
31	0,739084
32	0,739086
33	0,739085
34	0,739086
35	0,739085
36	0,739085
37	0,739085
38	0,739085
39	0,739085
40	0,739085
41	0,739085
42	0,739085

L'esempio precedente ci ha mostrato un sistema dinamico particolarmente **stabile**, qualunque sia il punto iniziale sappiamo quale sarà l'evoluzione del sistema. Un punto fisso stabile assicura che il sistema è "robusto" rispetto a piccole perturbazioni o errori da approssimazione; ciò significa che il sistema può resistere a cambiamenti imprevisti senza subire effetti drastici o irreversibili. Molti sistemi, sia naturali che artificiali, tendono a evolversi verso stati di equilibrio. Se questi stati di equilibrio (punti fissi) non fossero stabili, il sistema non potrebbe mantenere un comportamento coerente e ordinato. Ad esempio, l'omeostasi nei sistemi biologici è basata sulla stabilità di certi punti fissi che rappresentano condizioni di equilibrio.

Ora qualche definizione e un teorema fondamentale per chiarire la questione e per dotarci di uno strumento fondamentale per lo studio della stabilità locale dei punti fissi.

<u>Definizione</u>

Sia x^* un punto fisso della funzione $f(x)$ e sia $|f'(x^*)| \neq 1$.

Diremo che x^* è un punto fisso *attrattivo* o *asintoticamente stabile* se esiste un intorno U di x^* tale che *se* $x_0 \in U$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} f^n(x_0) = x^*$$

Diremo che x^* è un punto fisso *repulsivo* o *instabile se* esiste un intorno U di x^* tale che *se* $x_0 \in U$, $x_0 \neq x^*$, allora *esiste* $k>0$ *tale che* $f^k(x_0) \notin U$.

<u>Teorema (sulla stabilità locale)</u>

Sia x^* un punto fisso della funzione $f(x)$.

1) Se $|f'(x^*)| < 1$ allora x^* è un punto fisso *attrattivo* o *asintoticamente stabile*.

2) Se $|f'(x^*)| > 1$ allora x^* è un punto fisso *repulsivo* o *instabile.*

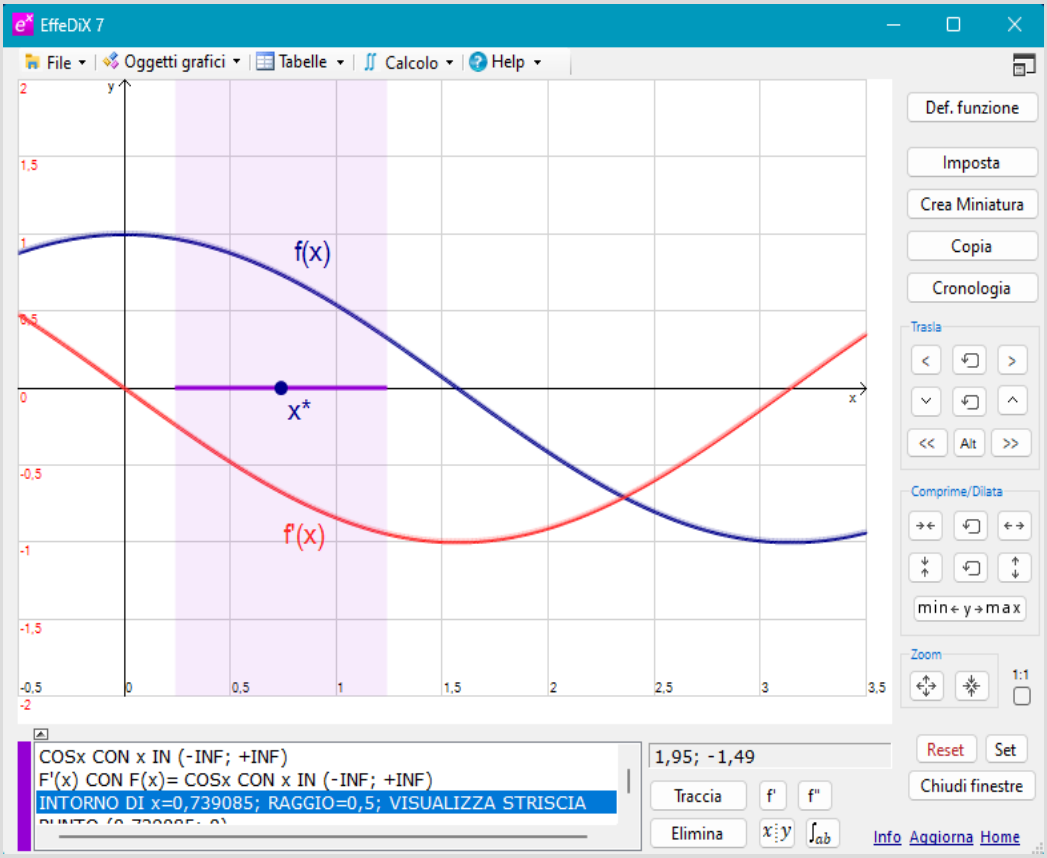
Detto in termini intuitivi: se un punto fisso è **attrattivo** le orbite che partono in punti vicini al punto fisso convergono al punto fisso (sono "attratte" dal punto fisso), se un punto fisso è **repulsivo** si possono trovare punti vicini quanto si vuole al punto fisso (ma non coincidenti col punto fisso) le cui orbite abbiano punti che si allontanano dal punto fisso (sono "respinti" dal punto fisso). Una conseguenza immediata del teorema: un orbita non potrà mai convergere ad un punto fisso repulsivo.

L'idea alla base del teorema è che localmente, in un intorno del punto fisso, possiamo studiare il comportamento dell'orbita **approssimando** la funzione $f(x)$ con la tangente al punto fisso (procedimento di linearizzazione) e dunque ritroviamo una situazione analoga a quella già esaminata nell'esempio 2 dove la funzione iterata è la

funzione lineare $f(x)=mx$ (infatti $m=f'(x^*)$ è proprio il coefficiente angolare della tangente nel punto fisso).

Ad esempio, il punto fisso $x^* = 0$ dell'esempio 2 è asintoticamente stabile quando $-1<m<1$; lo stesso punto fisso $x^* = 0$ è invece instabile se $m<-1$ oppure se $m>1$.

Altro esempio, il punto fisso $x^* \approx 0{,}739085$ dell'esempio 3 è asintoticamente stabile, infatti in un intorno del punto fisso il modulo della derivata è minore di 1 (vedi figura seguente, la derivata in rosso); ciò in questo caso è particolarmente importante dato che il punto fisso è determinabile solo in modo approssimato (un'approssimazione può essere più o meno accurata, ma il comportamento dell'orbita, data la stabilità, non dipende dall'accuratezza dell'approssimazione).



Questo procedimento di linearizzazione non funziona però se $f'(x^*)=\pm 1$; in questi casi dovremo studiare l'orbita con altri metodi. Per avere un'idea della varietà di situazioni che possono presentarsi ecco alcuni esempi di funzioni $f(x)$ con punto fisso x^* tale che $|f'(x^*)|=1$ su cui potete fare esperimenti:

1) $f(x) = x+x^3$, punto fisso $x^*=0$ *debolmente repulsivo*;
2) $f(x) = x-x^3$, punto fisso $x^*=0$ *debolmente attrattivo*;
3) $f(x) = x+x^2$, punto fisso $x^*=0$ debolmente repulsivo da destra e debolmente attrattivo da sinistra;
4) $f(x) = -x+1$, punto fisso $x^*=1/2$ né attrattivo né repulsivo e tuttavia considerato *stabile* (anche se non asintoticamente), perché se il punto iniziale è vicino a 1/2, i punti dell'orbita rimangono vicini a 1/2, oscillando con periodo 2.

Esempio 4

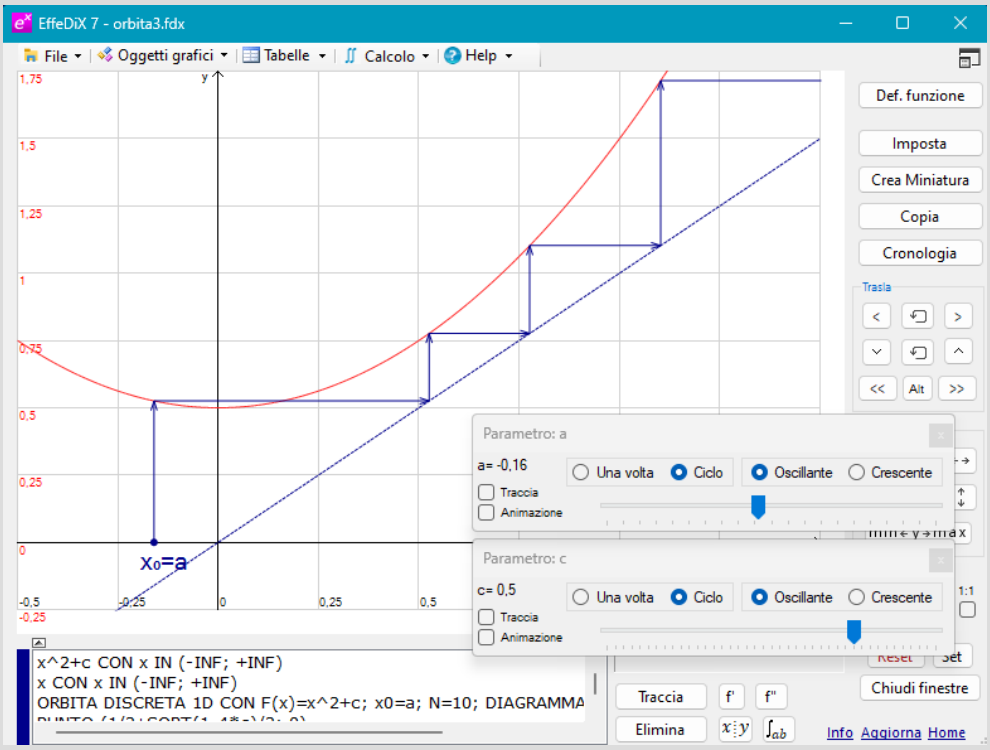
Sia $f(x) = x^2+c$ dove c è un parametro. Studiare l'evoluzione delle orbite generate per iterazione di $f(x)$ nei seguenti casi:

1) $c>1/4$ e punto iniziale x_0 qualsiasi
2) $c=-1/4$ e x_0 in un intorno dei punti fissi
3) $c=1/4$ e x_0 in un intorno del punto fisso

Risolvendo l'equazione $f(x)=x$, cioè l'equazione parametrica $x^2-x+c=0$, troviamo i punti fissi, sempre che le soluzioni siano reali:

$$x_1^* = 1/2 + \sqrt{(1-4c)}/2 \qquad x_2^* = 1/2 - \sqrt{(1-4c)}/2$$

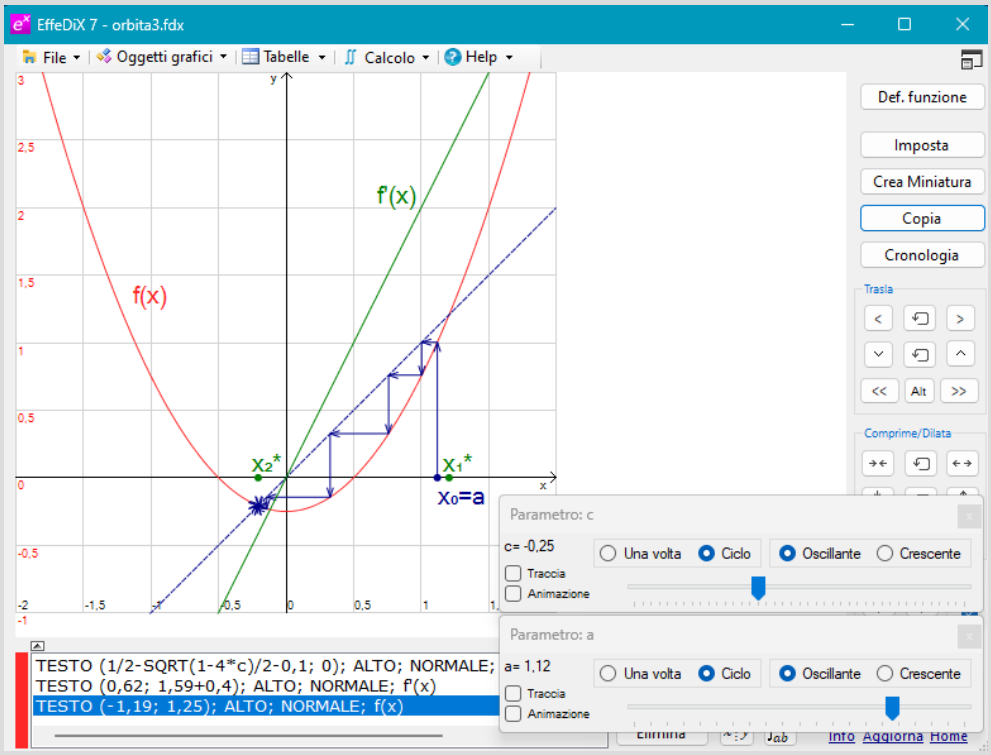
Tali soluzioni, se reali, sono le ascisse dei punti di intersezione della parabola $y=x^2+c$ con la retta $y=x$. Se $1-4c<0$, *cioè se* $c>1/4$, la parabola non interseca la bisettrice del primo e terzo quadrante e in questo caso non ci sono punti fissi. Ne segue, come sappiamo, che l'orbita non può essere convergente. L'analisi grafica ci mostra che per $c>1/4$ tutte le orbite sono divergenti, qualunque sia il punto iniziale x_0 (vedi figura seguente, notare le due slider bar, una per il parametro c e l'altra per il parametro $a=x_0$).



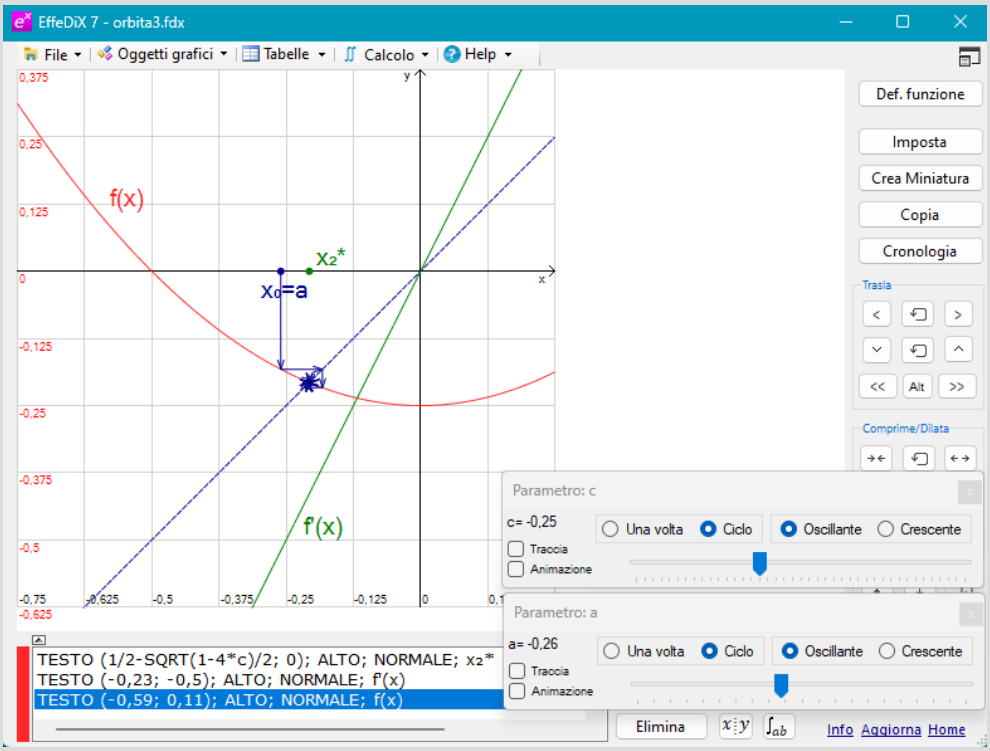
Per c=-1/4 i due punti fissi sono sono

$$x_1^* = 1/2 + \sqrt{2}/2 \approx 1{,}207 \quad \text{e} \quad x_2^* = 1/2 - \sqrt{2}/2 \approx -0{,}207$$

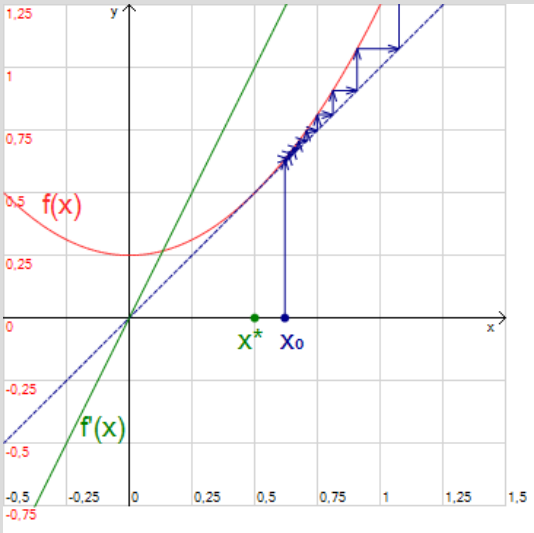
La derivata $f'(x_1^*)$ è maggiore di 1 e quindi, per il teorema sulla stabilità, x_1^* è un punto fisso **repulsivo**. L'analisi grafica ci mostra che in un intorno destro del punto fisso, l'orbita diverge mentre in un intorno sinistro converge all'altro punto fisso (quindi in ogni caso si allontana da x_1^*). La figura seguente mostra un'orbita con punto iniziale in un intorno sinistro.

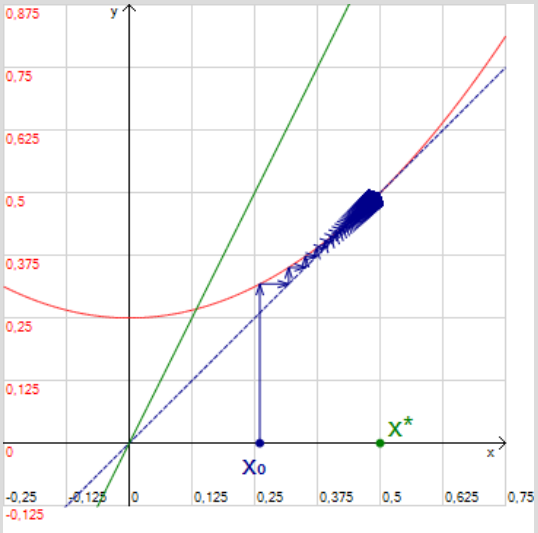


Diversa la situazione delle orbite che partono abbastanza vicine ad x_2^*, infatti $|f'(x_2^*)|<1$ e quindi, per il teorema sulla stabilità, x_2^* è un punto fisso **asintoticamente stabile** (è un attrattore). L'analisi grafica ci conferma che in un intorno del punto fisso, l'orbita converge al punto fisso. La figura seguente mostra un'orbita con punto iniziale in un intorno x_2^*.



Per $c=1/4$ la parabola $y=f(x)$ è tangente alla retta $y=x$ e $f(x)$ ha l'unico punto fisso $x^*=1/2$. In questo caso la derivata $f'(x^*)$ è uguale a 1 e quindi il teorema sulla stabilità **non ci fornisce alcuna informazione**. Ricorrendo all'analisi grafica ci rendiamo conto che il punto fisso è instabile: in un intorno destro di 1/2, l'orbita diverge, mentre in un intorno sinistro converge a 1/2 (anche se lentamente, impostare ad esempio 500 iterazioni). La figure seguenti mostrano in due situazioni i due diversi comportamenti dell'orbita.





I prossimi due esempi ci mostrano come determinare gli eventuali punti periodici di una funzione e come studiarne la stabilità.

Esempio 5

Sia $f(x)=-x^2+1$. Determinare i punti fissi di $f(x)$ e gli eventuali punti ciclici di periodo minimo 2, 3 e 4 nell'intervallo [-1, 1]. Valutare la stabilità dei punti ciclici.

Risolvendo l'equazione $x^2+x-1=0$ troviamo due punti fissi

$$x_1^* = -1/2 - \sqrt{5}/2 \quad e \quad x_2^* = -1/2 + \sqrt{5}/2$$

Solo il secondo cade nell'intervallo richiesto ed è instabile visto che $|f'(x_2^*)|>1$.

Per determinare i 2-cicli, dobbiamo risolvere l'equazione

$$f(f(x))=x$$

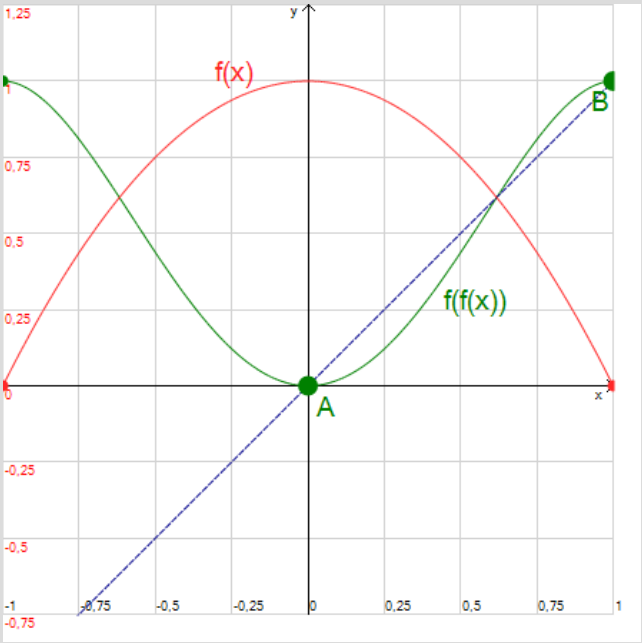
infatti come ricorderete un punto ciclico di periodo 2 è un punto fisso per $f^2(x)$.

Per tracciare una funzione iterata con EffeDiX, utilizzate l'opzione *Funzione iterata* che trovate nella solita finestra per definire una funzione (pulsante *Def. Funzione*).

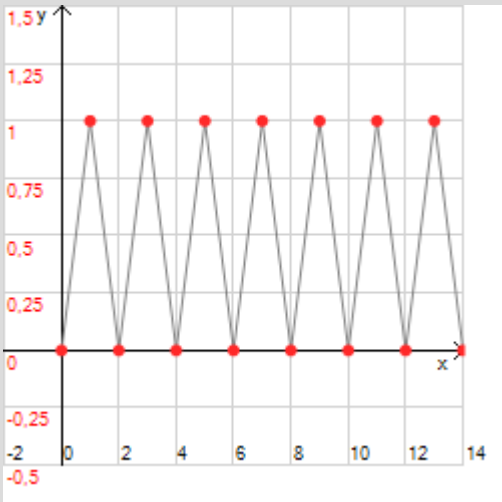
Impostate le limitazioni per *x* in modo che la funzione sia tracciata solo per *x* in [-1, 1].

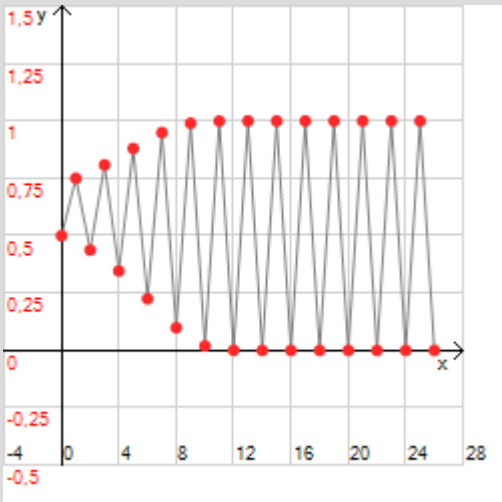
Per trovare le soluzioni di equazioni del tipo $f^n(x)=x$ utilizzate l'opzione *Punto - Punto di intersezione di due grafici* di EffeDiX perché in generale tali equazioni non sono risolvibili per formule ma è sempre possibile trovare soluzione numeriche.

La figura seguente mostra che la bisettrice *y=x* taglia il grafico di *f(f(x)),* nell'intervallo [-1, 1], in tre punti: uno di essi è relativo a un punto fisso di *f(x)*, ricorderete infatti che un punto fisso è periodico di periodo qualsiasi, gli altri due punti, i punti A e B, individuano un ciclo di periodo minimo 2 per le iterazioni di *f(x)*, il ciclo {0, 1, 0, 1, …}.



Tracciando la derivata della funzione *f(f(x))* ci rendiamo conto che i due punti fissi A e B di *f(f(x))* sono asintoticamente stabili (la derivata in tali punti è nulla). Ciò significa che **anche il ciclo sarà asintoticamente stabile**, cioè se il punto iniziale x_0 è in un intorno di 0 o di 1, l'orbita di x_0 per iterazione di *f(x)* tenderà al ciclo di periodo 2, sarà attratta dal 2-ciclo. Le figure seguenti mostrano il grafico dell'i-esima iterazione della funzione $f(x)=-x^2+1$ con punto iniziale $x_0=0$ (orbita periodica di periodo 2) e con punto iniziale $x_0=0,5$ (orbita tendente al ciclo di periodo 2).



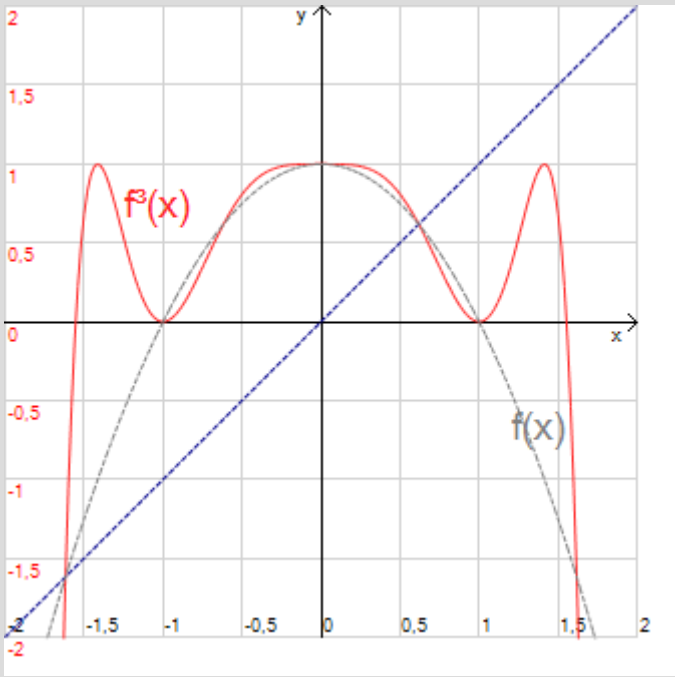


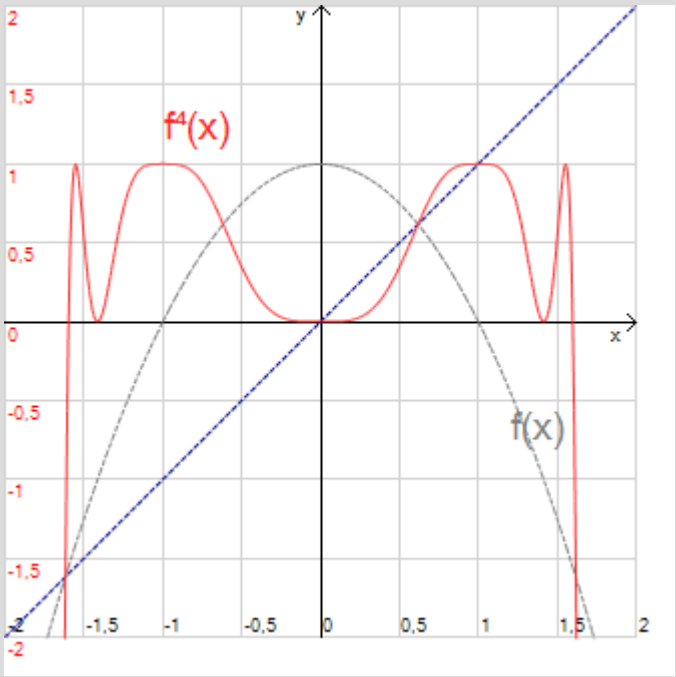
Per tracciare la derivata della funzione *f(f(x))* selezionare la funzione nel box degli oggetti grafici (che si trova sotto al piano cartesiano) e fare clic sul pulsante f'.

Per determinare i 3-cicli e i 4-cicli dobbiamo risolvere le equazioni

$$f^3(x)=x \quad e \quad f^4(x)=x$$

La prima delle figure seguenti mostra che la bisettrice $y=x$ taglia il grafico di $f^3(x)$ solo nei due punti relativi ai punti fissi di $f(x)$, la seconda che la bisettrice taglia il grafico di $f^4(x)$ nei due punti relativi ai punti fissi di $f(x)$ e nei punti relativi al ciclo di periodo 2 (come dovevamo aspettarci).





Possiamo dunque concludere che non esistono cicli di periodo minimo 4 e di periodo minimo 3.

Nota: quando tracciate $f^4(x)$ utilizzando la procedura indicata precedentemente non occorre sviluppare l'espressione della funzione, inserirete direttamente la funzione

-(-(-(-x^2+1)^2+1)^2+1)^2+1

Per tracciare con accuratezza funzioni iterate potrebbe essere necessario impostare un valore più alto nell'opzione *Impostazioni – Prossimo oggetto – Numero punti*; tale valore è per default 200, portatelo ad es. a 1000.

Abbiamo già visto vari tipi di orbite: convergenti, divergenti, periodiche, definitivamente periodiche. L'ultimo esempio ci ha mostrato un nuovo tipo di orbita, un'orbita *convergente ad un'orbita periodica* (diremo anche *convergente ad un ciclo* o *asintoticamente periodica*); infatti nell'esempio precedente l'orbita di $x_0=0,5$ non è

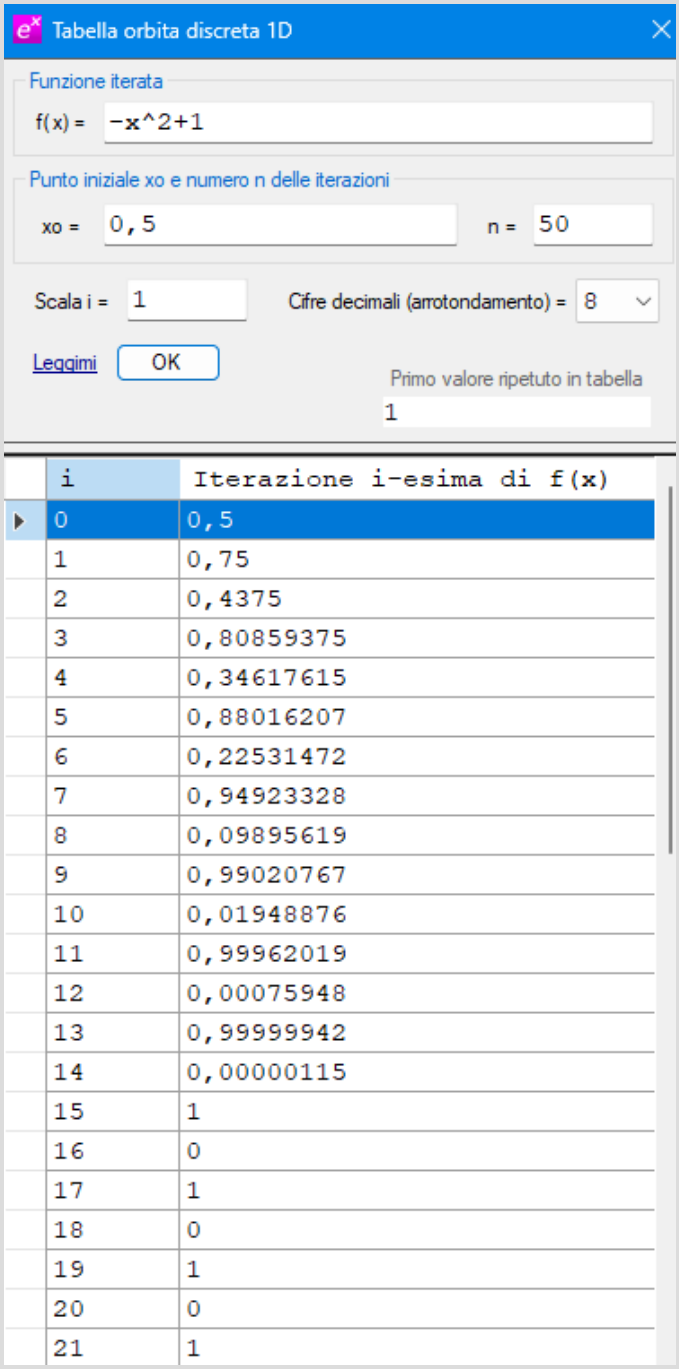
periodica, nemmeno definitivamente, ma converge ad un ciclo di periodo *2.* Più precisamente diremo che l'orbita di x_0 *converge ad un ciclo di periodo n* se

$$\lim_{k\to+\infty} f^{nk}(x_0) = p$$

con *p* punto periodico di periodo *n*. Ad esempio nel nostro caso

$$\lim_{k\to+\infty} f^{2k}(0,5) = 0$$

e noi sappiamo che x=0 è un punto ciclico di periodo 2. Per avere un riscontro **sperimentale** di quest'ultimo limite, generare la tabella relativa all'orbita e verificare che per *n* sufficientemente grande i valori di posto *2n*, arrotondati, ad es., a 8 cifre decimali, sono tutti uguali a 0 (vedi figura seguente).



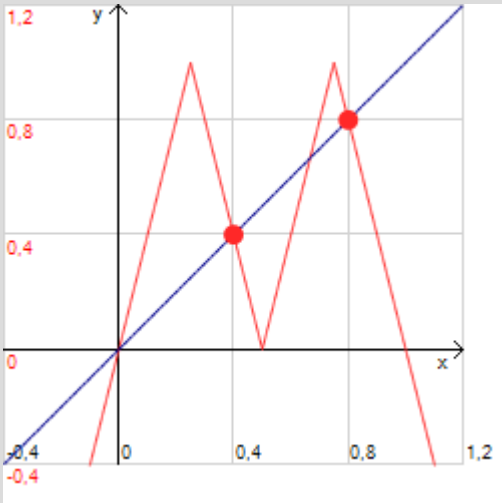
i	Iterazione i-esima di f(x)
0	0,5
1	0,75
2	0,4375
3	0,80859375
4	0,34617615
5	0,88016207
6	0,22531472
7	0,94923328
8	0,09895619
9	0,99020767
10	0,01948876
11	0,99962019
12	0,00075948
13	0,99999942
14	0,00000115
15	1
16	0
17	1
18	0
19	1
20	0
21	1

La stabilità per un punto periodico si riconduce alla definizione di stabilità per un punto fisso. Diremo che il punto ciclico x_0 di periodo n è *attrattivo* o *asintoticamente stabile* se x_0 è un punto fisso **attrattivo** per la funzione $f^n(x)$; diremo che è *repulsivo* o *instabile* se lo è il punto fisso $f^n(x_0)$. Nell'esempio precedente sia il punto $x_0=0$ sia il punto $x_0=1$ sono punti ciclici di periodo 2 attrattivi.

Il prossimo esempio ci mostra un punto ciclico x_0 di periodo 2 **instabile**: una piccola perturbazione $x_0+\varepsilon$ del punto iniziale ha come effetto l'allontanamento dal 2-ciclo.

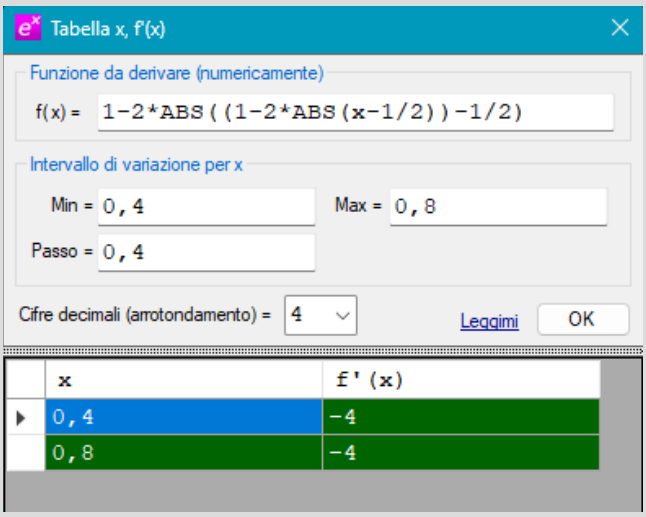
Esempio 6

Sia $f(x)=1-2|x-1/2|$ (mappa a tenda). Studiare l'orbita di $x_0=0,4$.

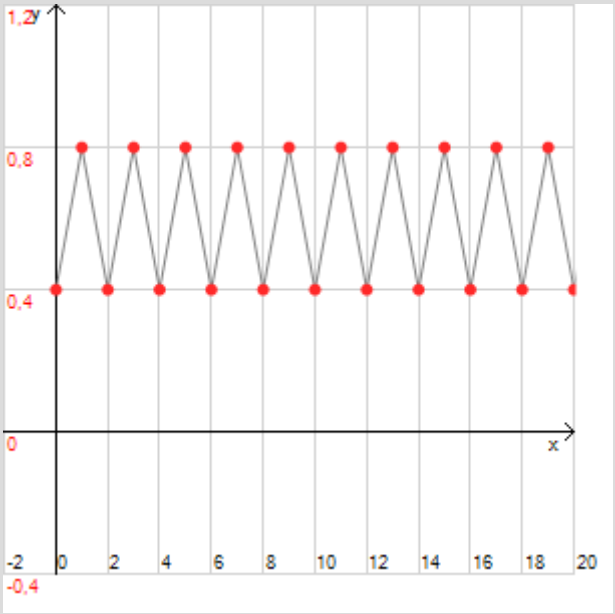


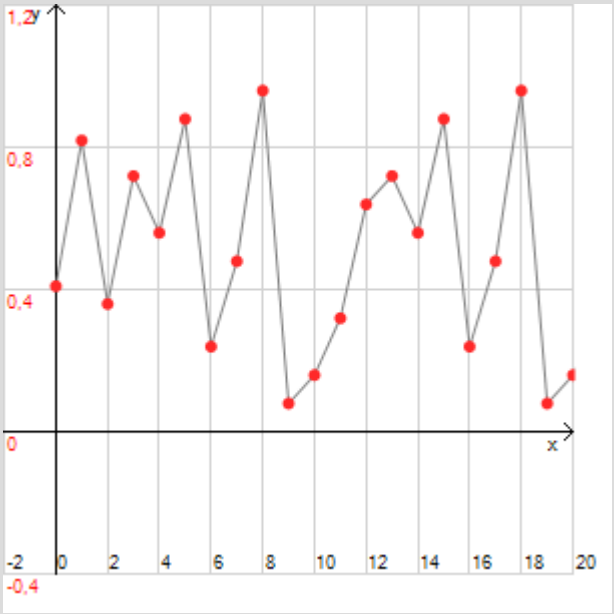
Verifichiamo prima di tutto se 0,4 è un punto fisso: non lo è, $f(0,4)=0,8$ (utilizzare l'opzione *Tabelle – Tabella x, f(x)*). Per avere un'idea della situazione tracciamo il grafico dell'i-esima iterazione in funzione di i: appare un ciclo di periodo 2, il ciclo $\{0,4;\ 0,8;\ 0,4;\ 0,8;\ \ldots\}$. Per avere conferma dobbiamo verificare che 0,4 (e 0,8) sono punti fissi per $f(f(x))$. Tracciando il grafico di $f(f(x))$ e della solita bisettrice, abbiamo la conferma che 0,4 e 0,8 sono punti ciclici di periodo minimo 2 (vedi figura a fianco).
Per tracciare una funzione iterata vedi quanto detto nell'esempio 5.

Il ciclo sarà stabile? Derivando la funzione $f(f(x))$ nei punti 0,4 e 0,8, vediamo che in entrambi i casi il modulo della derivata è maggiore di 1 (vedi figura seguente): i due punti fissi sono instabili e quindi anche il ciclo lo è.



Le figure seguenti mostrano il grafico dell'i-esima iterazione della funzione *f(x)* con punto iniziale $x_0=0,4$ (a sinistra) e con punto iniziale perturbato $x_0=0,4+0,01$ (a destra): come ci aspettavamo il ciclo è instabile.





Esaminiamo ora un importante strumento di cui dispone EffeDiX per studiare un sistema dinamico discreto: il *diagramma delle orbite al variare di un parametro r* o *diagramma di biforcazione*. Tale diagramma ci fornisce informazioni sul comportamento asintotico delle orbite al variare di un parametro *r* da cui la funzione *f(x)* iterata dipende. In particolare potremo individuare, almeno approssimativamente, quei valori del parametro per cui si determinano dei cambiamenti **qualitativi** nella dinamica delle orbite, ad esempio quando si passa dalla convergenza ad un punto fisso alla convergenza a un 2-ciclo oppure quando un punto fisso perde stabilità. Tali valori del parametro prendono il nome di *punti di biforcazione*.

Per capire come funziona questo strumento studiamo le orbite generate per iterazione della funzione $f(x)=r\cos x$. La prima delle figure seguenti mostra la finestra di impostazione: il punto iniziale è $x_0 = 0,5$ e il parametro *r* varia tra -1,9 e 1,9 con passo 0,01. Per ogni valore del parametro *r*, il diagramma delle orbite visualizza sulla retta verticale $x=r$ i valori dell'orbita di x_0 dopo un certo numero *n* di iterazioni (cioè saranno visualizzati i punti (r, x_{n+1}), (r, x_{n+2}), … e questo per ogni *r*). Il numero di iterazioni da calcolare è impostato a 100, ma le prime 70 di queste, il transitorio, **non saranno visualizzate** in modo da capire quale sia l'andamento asintotico (in altre parole: sono tracciati sull'asse $x=r$ solo gli ultimi 30 valori dell'orbita). Tenete presente che nel primo campo dovrete utilizzare necessariamente il parametro *r* (e non sono consentiti altri parametri) mentre negli altri campi non sono consentiti parametri. La seconda figura mostra il diagramma ottenuto.

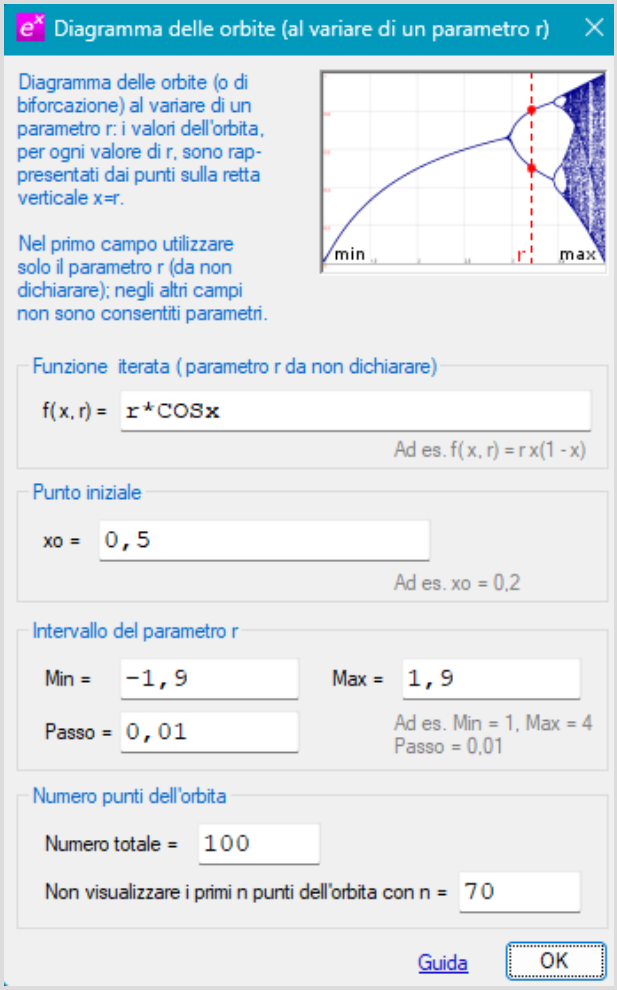
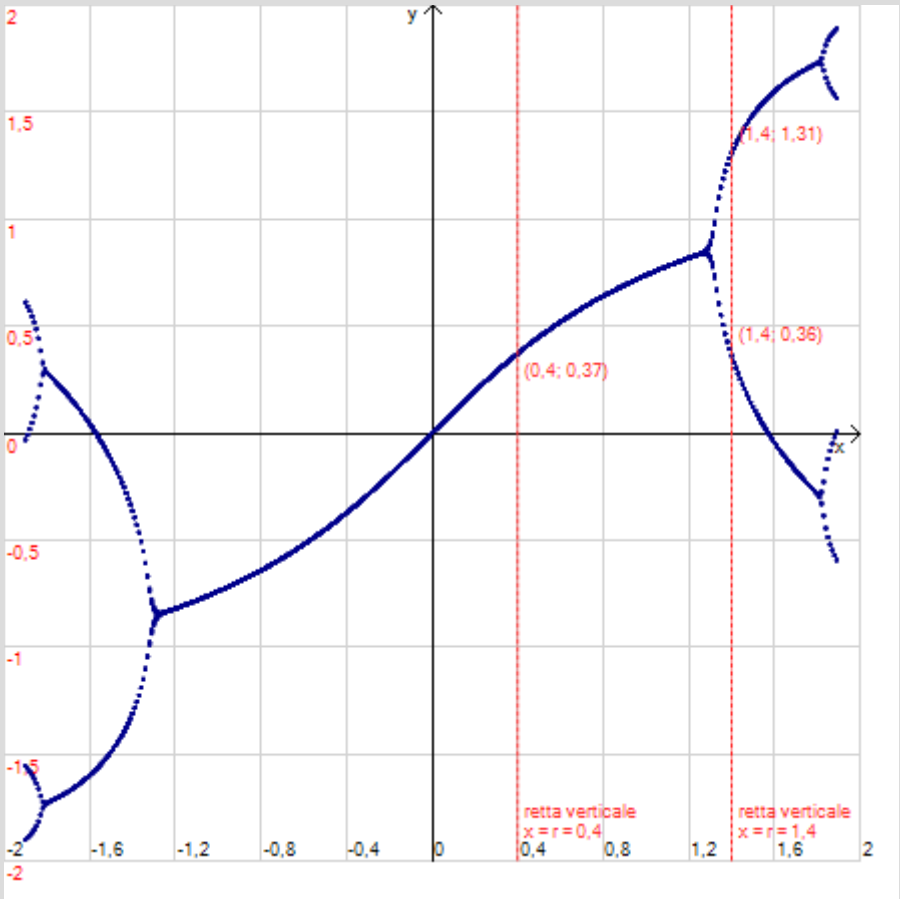


Diagramma delle orbite (al variare di un parametro r)
Diagramma delle orbite (o di biforcazione) al variare di un parametro r: i valori dell'orbita, per ogni valore di r, sono rappresentati dai punti sulla retta verticale x=r.
Nel primo campo utilizzare solo il parametro r (da non dichiarare); negli altri campi non sono consentiti parametri.
min
r
max
Funzione iterata (parametro r da non dichiarare)
f(x, r) = r*COSx
Ad es. f(x, r) = r x(1 - x)
Punto iniziale
xo = 0,5
Ad es. xo = 0,2
Intervallo del parametro r
Min = -1,9
Max = 1,9
Passo = 0,01
Ad es. Min = 1, Max = 4
Passo = 0,01
Numero punti dell'orbita
Numero totale = 100
Non visualizzare i primi n punti dell'orbita con n = 70
Guida
OK


y
x
(1,4; 1,31)
(1,4; 0,36)
(0,4; 0,37)
retta verticale
x = r = 0,4
retta verticale
x = r = 1,4
2
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
-2
-1,6
-1,2
-0,8
-0,4
0
0,4
0,8
1,2
1,6
2

Osserviamo ad esempio che per *r=0,4* l'orbita di 0,5 converge al punto fisso approssimativamente uguale a 0,37 (i 30 punti tracciati sono praticamente tutti sovrapposti, tutti i valori delle ultime 30 iterazioni sono molto vicini a 0,37); oppure per *r=1,4* l'orbita di 0,5 converge ad un ciclo di periodo 2 oscillando approssimativamente tra 0,36 e 1,31. Potete verificare tali osservazioni tracciando in entrambi i casi il grafico dell'i-esima iterazione in funzione di *i* o generando la relativa tabella.

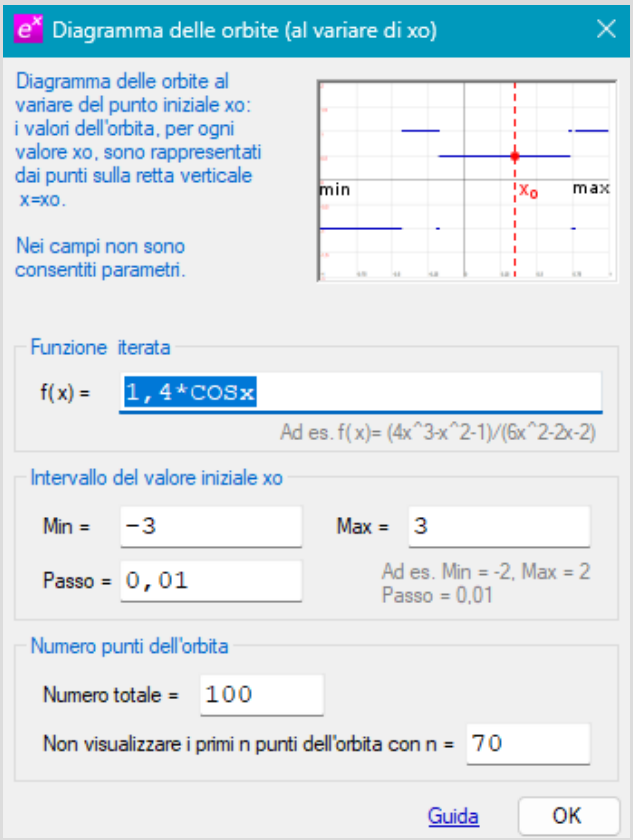
Il diagramma mostra con chiarezza quali siano i valori critici per il parametro *r* nell'intervallo considerato, quali siano cioè i punti di biforcazione: si tratta nel nostro caso dei quattro valori del parametro *r* per cui si passa da situazioni di equilibrio (punti fissi) a cicli di periodo 2 oppure da cicli di periodo 2 a cicli di periodo 4.

L'elaborazione del diagramma delle orbite può richiedere tempi lunghi (ma può essere interrotta in qualsiasi momento digitando ESC); per questo motivo quando tra gli oggetti da tracciare (nel box degli oggetti grafici) è presente un diagramma delle orbite vengono automaticamente disabilitate alcune funzionalità del programma (ad esempio non potrete eseguire lo scorrimento continuo del grafico o ridimensionare la finestra principale). Quando ritracciate un diagramma delle orbite dopo aver modificato qualche dato è consigliabile cancellare dal box degli oggetti grafici la versione precedente in modo da ridurre i tempi di elaborazione.

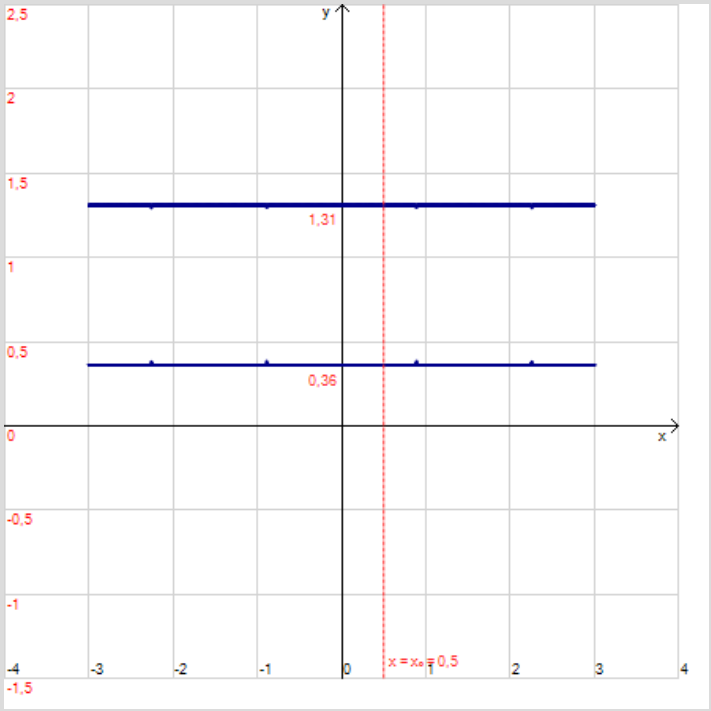
Esaminiamo ora un altro importante strumento di cui dispone EffeDiX per studiare un sistema dinamico discreto: *il diagramma delle orbite al variare del punto iniziale*. Tale diagramma ci fornisce informazioni sul comportamento asintotico delle orbite al variare del punto iniziale x_0.

Per capire come funziona questo strumento studiamo le orbite generate per iterazione della funzione *f(x)=rcosx* già esaminata, nel caso in cui sia *r=1,4* e facendo variare x_0 tra -3 e 3 con passo di un centesimo. Per ogni valore di x_0, il diagramma delle orbite visualizza sulla retta verticale $x=x_0$ i valori dell'orbita di x_0 dopo un certo numero *n* di iterazioni (cioè saranno visualizzati i punti (x_0, x_{n+1}), (x_0, x_{n+2}), … e questo per ogni x_0).

La figura a fianco mostra la finestra d'impostazione. Il numero di iterazioni da calcolare è impostato a 100, ma le prime 70 di queste, il transitorio, **non saranno visualizzate** in modo da capire quale sia l'andamento asintotico.



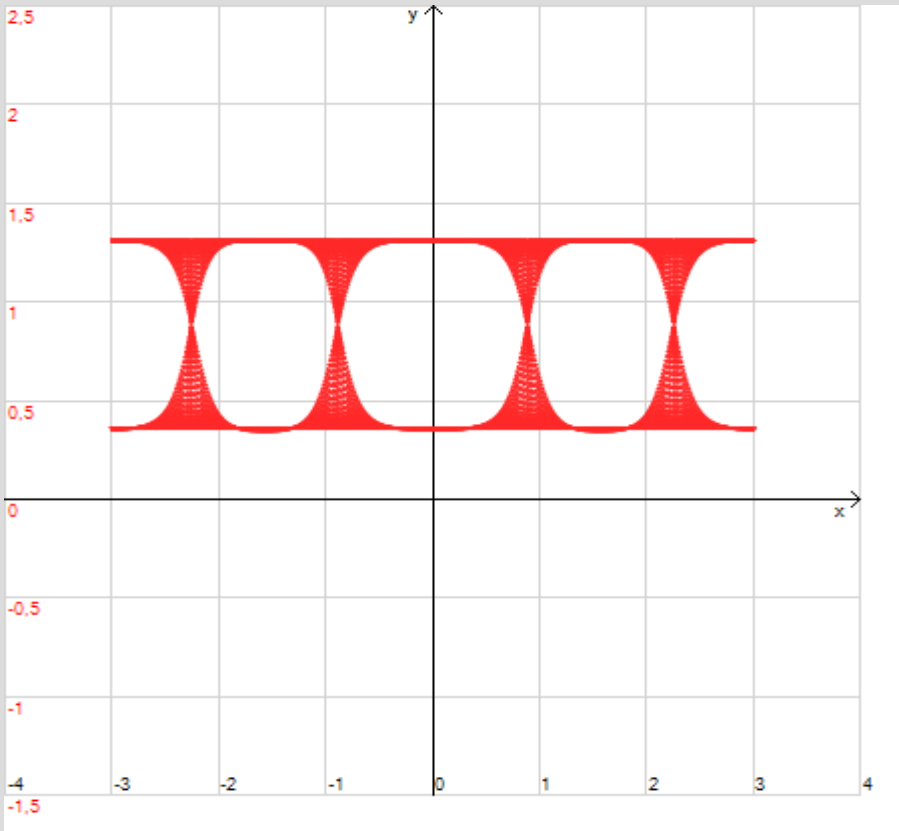
Tenete presente che nei vari campi non sono consentiti parametri. Nella figura seguente vedete il diagramma ottenuto.



Osservando il diagramma potremmo dire che tutte (tutte?) le orbite che partono nell'intervallo aperto (-3, 3) convergono al 2-ciclo (stabile) che oscilla tra 0,36 e 1,31, cosa che, mediante il diagramma precedente (diagramma di biforcazione), avevamo verificato solo nel caso di $x_0=0,5$. Per verificare la stabilità asintotica del 2-ciclo potete procedere al solito modo considerando la funzione $f^2(x)$ e la sua derivata.

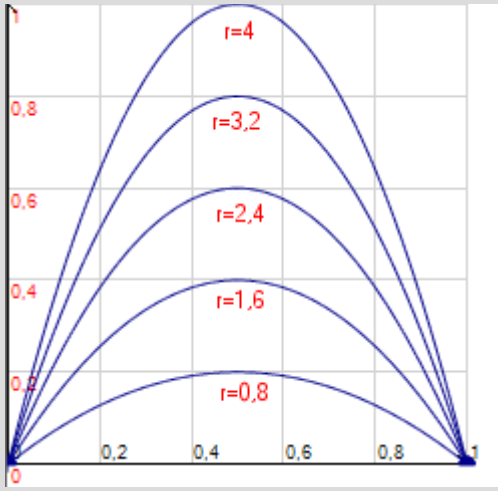
Fate però attenzione, tutti questi diagrammi devono essere interpretati cum grano salis: nel nostro caso, ad esempio, la funzione $f(x)=1,4\cos x$ ha il punto fisso $x_0\approx 0,88577$ che però è **instabile** e dunque **non osservabile** nel diagramma, basta una piccola approssimazione $x_0\pm\varepsilon$ a far sì che l'orbita converga al 2-ciclo. Al contrario se il punto fisso fosse stabile potremmo "osservarlo" nel diagramma perché la convergenza avverrebbe in un intero intorno del punto fisso. Questi diagrammi, anche quello di biforcazione, ci forniscono una "visione asintotica" delle orbite e dunque l'osservabilità del comportamento di un'orbita è legata alla stabilità dei punti periodici.

Cambiando le impostazioni del diagramma, ponendo il numero di punti del transitorio pari a 10 (anziché 70), ci rendiamo conto inoltre che la convergenza al 2-ciclo è più o meno rapida al variare di x_0 (vedi figura seguente).



Esempio 7 (La mappa logistica, prima parte)

Sia $f(x)=rx(1-x)$ (mappa logistica) con $x_0 \in [0, 1]$ e $r \in (0, 4]$. Determinare i punti fissi e studiarne la stabilità.



Notare che per ogni $r \in (0, 4]$, la funzione f applica l'intervallo [0, 1] in se stesso (non necessariamente suriettivamente). La figura a fianco mostra il grafico di $f(x)$ per alcuni valori di r.

Risolvendo l'equazione $rx(1-x)=x$ si trovano i due punti fissi $x_1^*=0$ e $x_2^*=(r-1)/r$.

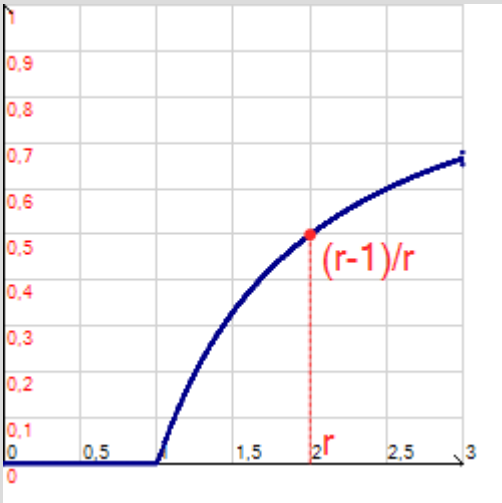
<u>Stabilità di x_1^*</u>

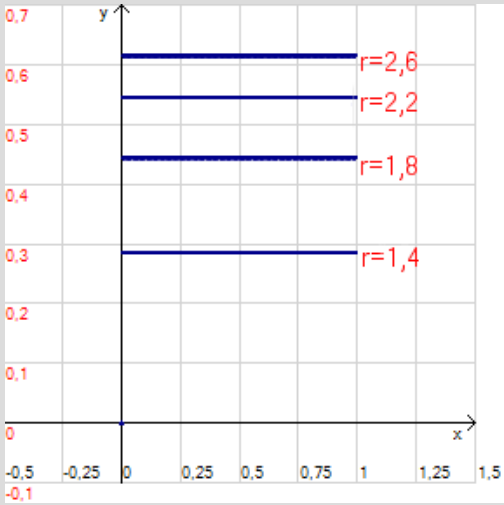
Poiché $f'(0)=r$, x_1^* è asintoticamente stabile se $0<r<1$ e instabile se $r>1$. Se $r=1$, la derivata è uguale a 1 e non possiamo applicare il teorema sulla stabilità, dobbiamo ricorrere all'analisi grafica o a una tabella; potrete verificare che in un intorno destro di $x_1^*=0$ l'orbita converge a 0 (anche se molto lentamente) mentre in un intorno sinistro diverge.

Stabilità di x_2^*

Osserviamo prima di tutto che x_2^* appartiene all'intervallo (0, 1] se $r>1$. Si ha $f'(x_2^*)= 2-r$ e quindi x_2^* è asintoticamente stabile se $1<r<3$ e instabile se $r>3$. Per $r=3$, la derivata vale -1, di nuovo non possiamo utilizzare il teorema sulla stabilità e ricorreremo all'analisi grafica (diagramma a ragnatela) da cui possiamo intuire che x_2^* è asintoticamente stabile (anche se la convergenza a x_2^* in un intorno di x_2^* è lentissima).

La prima delle figure seguenti mostra il diagramma delle orbite al variare del parametro r con punto iniziale $x_0=0,5$ e r compreso tra 0 e 3; il diagramma rimane lo stesso anche cambiando il punto iniziale. La seconda figura mostra il diagramma delle orbite al variare del punto x_0 in [0, 1], tracciato, nello stesso piano, per quattro diversi valori di r.





I due diagrammi confermano quanto già ricavato grazie al teorema sulla stabilità e forniscono anche ulteriori informazioni, ad esempio, osservando il diagramma della seconda figura ci rendiamo conto che per $r=1,4$ l'orbita di tutti i punti $x_0 \in (0, 1)$ converge a $(1,4-1)/1,4 \approx 0,286$, cioè il *bacino di attrazione*[2] del punto fisso x_2^* è l'intervallo (0, 1).

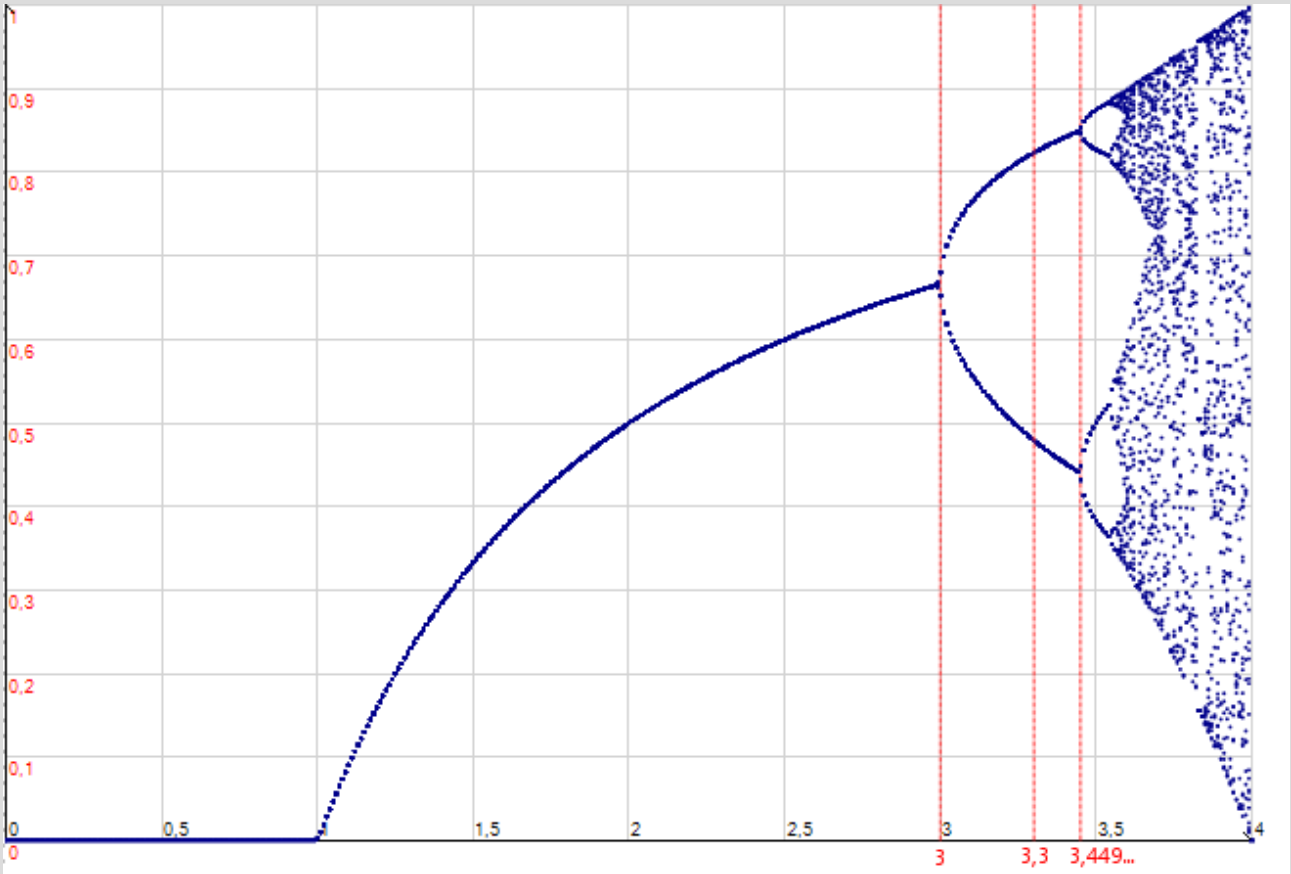
Esempio 8 (La mappa logistica, seconda parte)

Sia $f(x)=rx(1-x)$ (mappa logistica) con $x_0 \in [0, 1]$ e $r \in (0, 4]$. Determinare un'orbita convergente ad un ciclo di periodo 2 e una convergente ad un ciclo di periodo 4.

Utilizziamo il diagramma delle orbite al variare del parametro r scegliendo come punto iniziale, ad esempio, $x_0=0,5$ (impostazioni: Min=0, Max=4, Passo=0,01, Totale punti=300, Punti non visualizzati=250). Osservando il diagramma ci accorgiamo che abbiamo varie (infinite) possibilità per individuare un 2-ciclo, sceglieremo un valore di

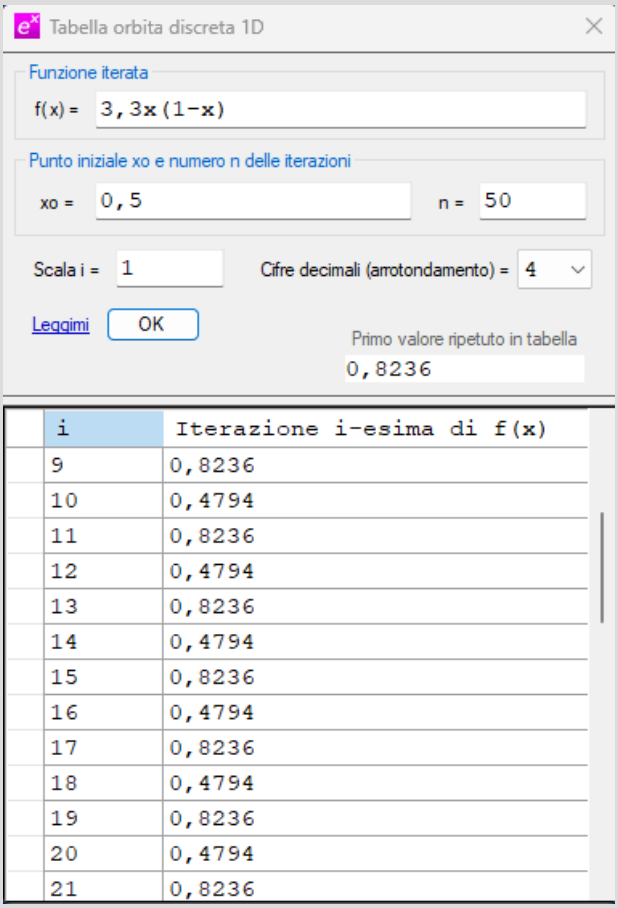
2 Si dice *bacino d'attrazione* di un punto fisso x^* l'insieme B dei punti iniziali x_0 tali che l'orbita di x_0 tende a x^*. Si ha sempre $x^* \in B$; se x^* è asintoticamente stabile esiste almeno un intorno di x^* che appartiene a B.

r tale che la retta *x=r* intersechi il grafico in due punti. Sceglieremo un valore di *r* maggiore di 3 e minore, all'incirca, di 3,45, ad esempio *r=3,3*.



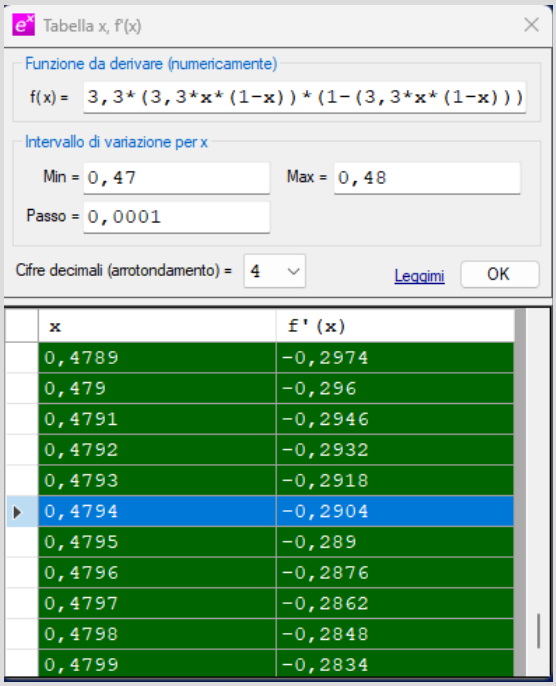
Già osservando il diagramma delle orbite ci rendiamo conto che il ciclo oscillerà approssimativamente tra 0,48 e 0,82; utilizzando una tabella potremo avere valori più accurati e anche una verifica (sperimentale) della stabilità, vedi figura a fianco.

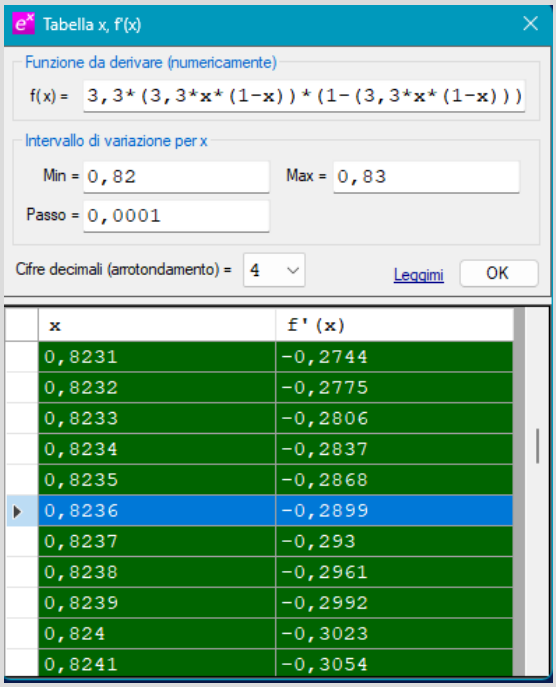
Vediamo così che l'orbita di $x_0=0,5$ per iterazione della funzione $f(x)=3,3x(1-x)$ converge al 2-ciclo oscillante con buona approssimazione tra 0,4794 e 0,8236.



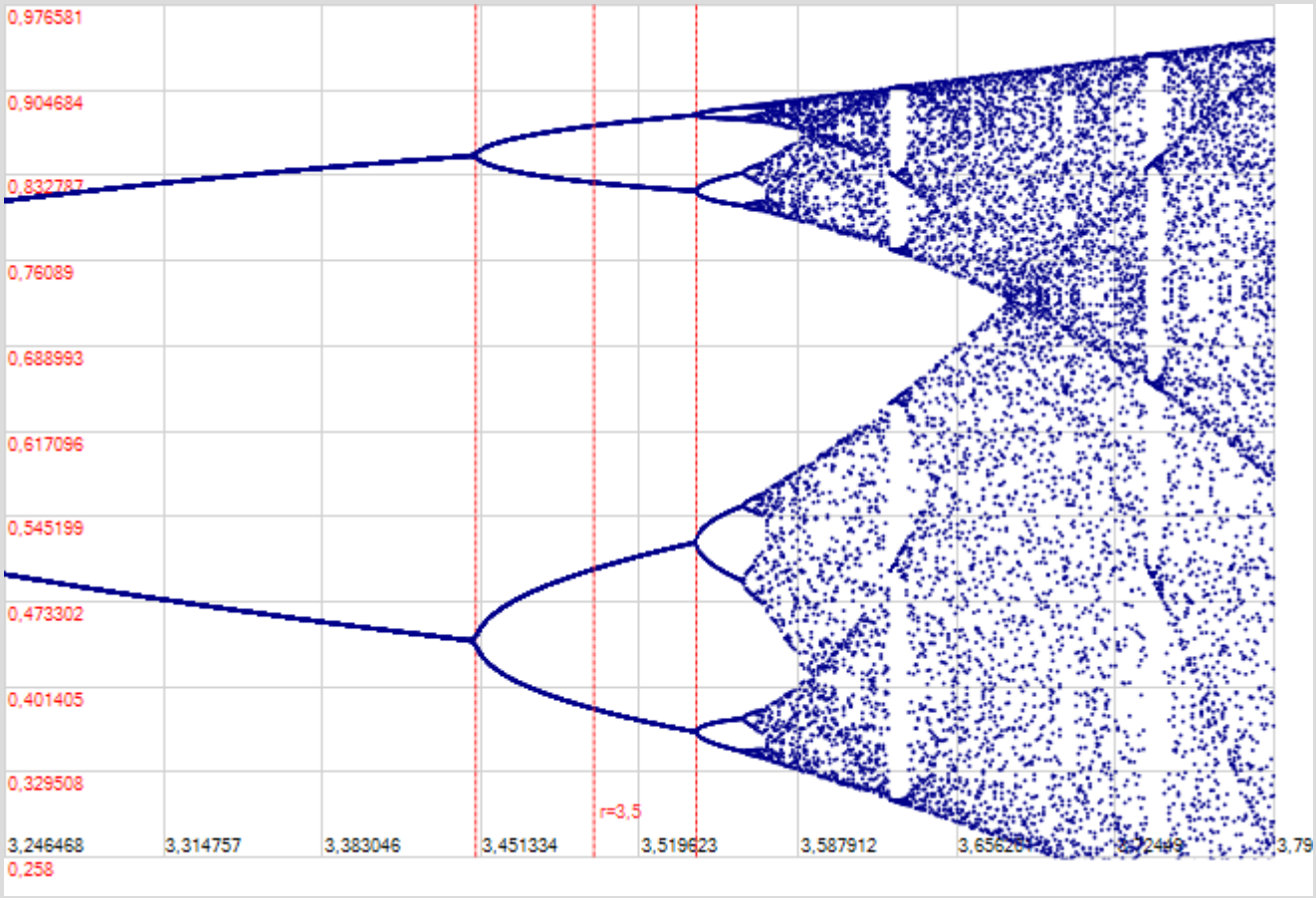
i	Iterazione i-esima di f(x)
9	0,8236
10	0,4794
11	0,8236
12	0,4794
13	0,8236
14	0,4794
15	0,8236
16	0,4794
17	0,8236
18	0,4794
19	0,8236
20	0,4794
21	0,8236

Per una conferma teorica ricorriamo al teorema sulla stabilità e valutiamo la derivata della funzione $f^2(x)$ in un intorno dei due valori trovati (vedi figure seguenti). Come si vede in un intorno dei due valori il modulo della derivata è minore di 1 (consideriamo intorni e non valori puntuali perché tali valori sono calcolati con approssimazione a meno di un decimillesimo). Per ottenere una funzione iterata ricordate di utilizzare l'apposita opzione di EffeDiX.





Per individuare un 4-ciclo procederemo in modo analogo; la figura seguente mostra una zoomata sul precedente diagramma delle orbite (qui il passo è 0,001, totale punti 500, punti non visualizzati 450, il punto iniziale è sempre $x_0=0,5$). Potremo scegliere un valore di r compreso approssimativamente tra 3,45 e 3,544, ad esempio $r=3,5$. Si trova il 4-ciclo {0,875; 0,3828; 0,8269; 0,5009} con approssimazione a 4 decimali.
Anche in questo caso potremo fare la verifica di stabilità già esaminate nel caso del 2-ciclo, ricordando che dovremo studiare la derivata di $f^4(x)$ in un intorno dei valori del 4-ciclo.



Continuando a zoomare sul diagramma delle orbite potremo facilmente individuare cicli di periodo 8 e anche di periodo 16. Questo processo di raddoppiamento del periodo continua in realtà all'infinito ma gli intervalli del parametro r all'interno dei quali troviamo cicli dello stesso periodo diventano sempre più piccoli e la loro ampiezza tende a zero. Questa è una tabella che ci da un'idea dei valori, **indipendentemente** dal punto iniziale $x_0 \in [0, 1]$:

$0 \le r \le 3$	*cicli di periodo 1 (punti fissi)*	*ampiezza intervallo = 3*
$3 < r < 3{,}449489\ldots$	cicli di periodo 2	*ampiezza intervallo ≈ 0,4495*
$3{,}449489\ldots < r < 3{,}544090\ldots$	*cicli di periodo 4*	*ampiezza intervallo ≈ 0,0946*
$3{,}544090\ldots < r < 3{,}564407\ldots$	*cicli di periodo 8*	*ampiezza intervallo ≈ 0,0203*
$3{,}564407\ldots < r < 3{,}568759\ldots$	*cicli di periodo 16*	*ampiezza intervallo ≈ 0,0044*
$3{,}568759\ldots < r < 3{,}569692\ldots$	*cicli di periodo 32*	*ampiezza intervallo ≈ 0,0009*
$3{,}569692\ldots < r < 3{,}569891\ldots$	*cicli di periodo 64*	*ampiezza intervallo ≈ 0,0002*
…	…	…

La successione

$r_1 = 3$

$r_2 = 3{,}449489\ldots$

$r_3 = 3{,}544090\ldots$

…

sembra convergere al valore $r_\infty \approx 3{,}570$.

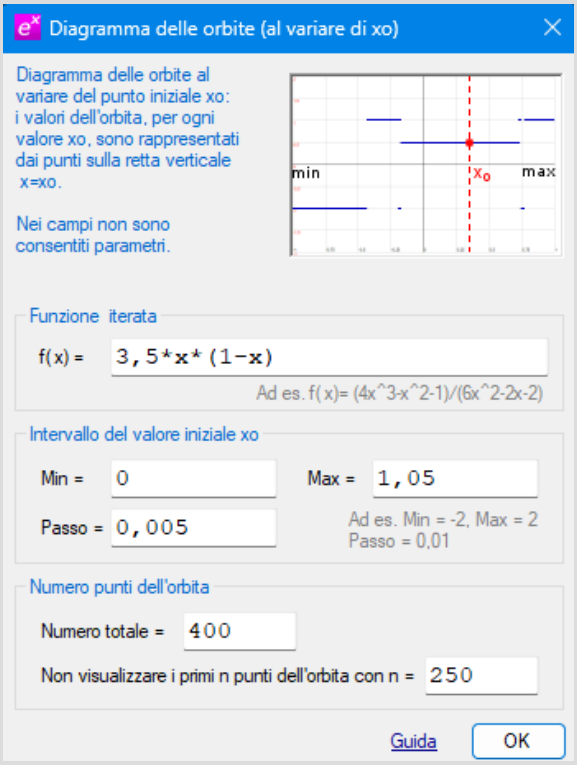
A questo punto la domanda che è naturale porsi è: cosa succede alle orbite quando r varia tra r_∞ e 4? C'è un esperimento che può darci una prima idea: tracciate il solito diagramma delle orbite, in blu, con punto iniziale $x_0=0,5$, poi, senza cancellare, ritracciate il diagramma in verde con punto iniziale $x_0=0,51$. Vedrete che i due diagrammi si sovrappongono perfettamente fino a $r_\infty \approx 3,57$, dopo però non c'è più sovrapposizione, si entra in una regione caotica del diagramma e vedremo sia punti verdi che punti blu; una piccola perturbazione del valore iniziale x_0 determina, quando $r>r_\infty$, un comportamento sostanzialmente diverso delle orbite (qui il video).

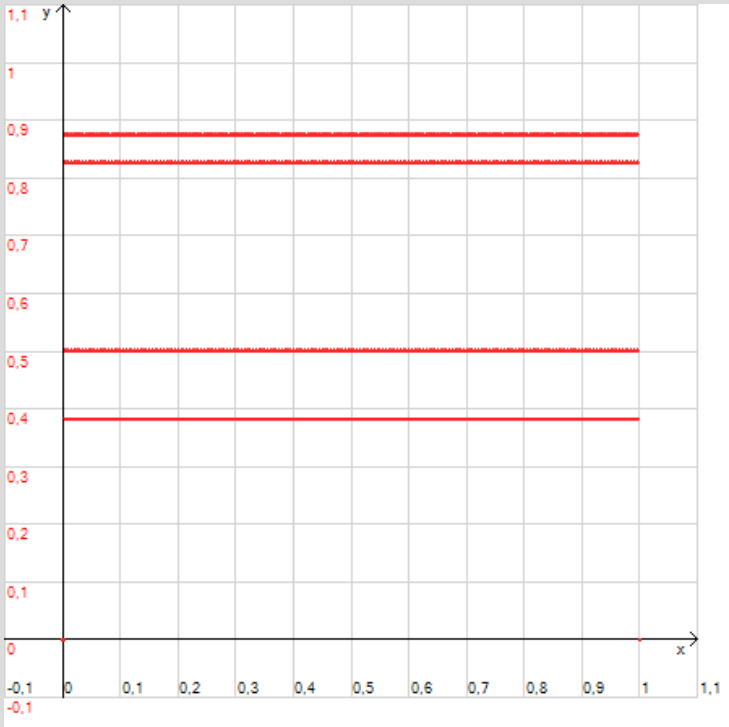
Una buona idea per cercare di capire cosa succede alle orbite della mappa logistica quando $r > r_\infty$ è scegliere un valore ben preciso di r e fare degli esperimenti. Nei prossimi esempi si è scelto il valore $r=4$ che mostra tutti gli aspetti che caratterizzano un nuovo tipo di orbite, le orbite caotiche.

Esempio 9

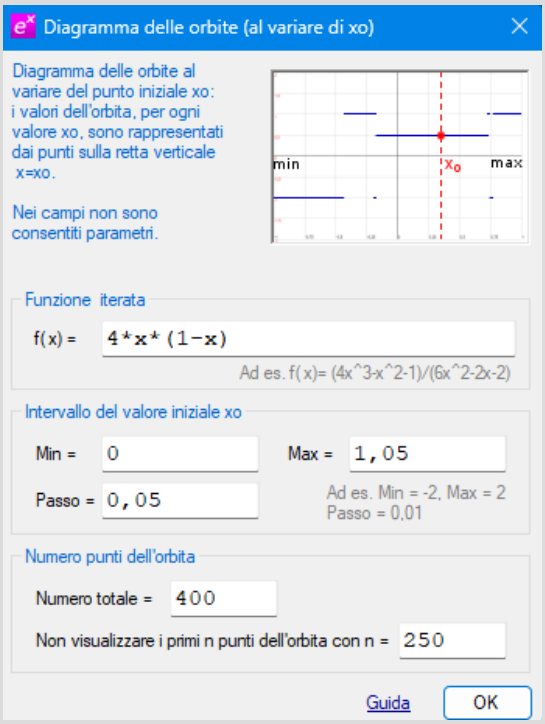
Tracciare il diagramma delle orbite al variare del punto iniziale x_0 per la mappa logistica $f(x)=rx(1-x)$ nel caso di $r=3,5$ e $r=4$.

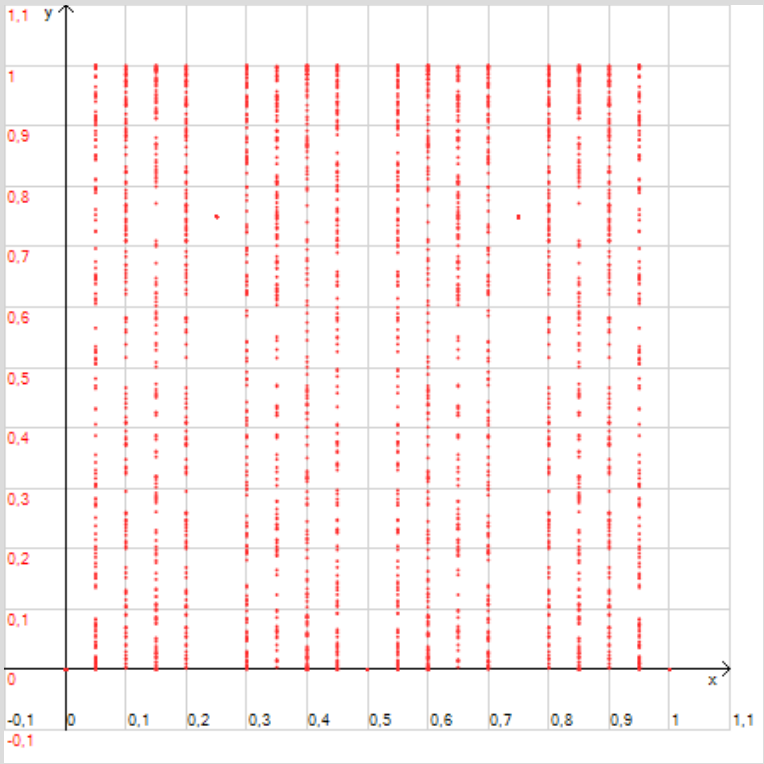
Nel primo caso siamo nell'intervallo di r in cui le orbite convergono a un 4-ciclo (vedi esempio precedente). La figura seguente mostra la finestra d'impostazione e il diagramma. Come ci aspettavamo tutte le orbite convergono a un 4-ciclo stabile escludendo i punti periodici che non sono stabili e quindi non osservabili (ad esempio il punto fisso $x^*=5/7$, instabile, non è osservabile, la più piccola approssimazione del valore porta l'orbita a convergere al 4-ciclo).





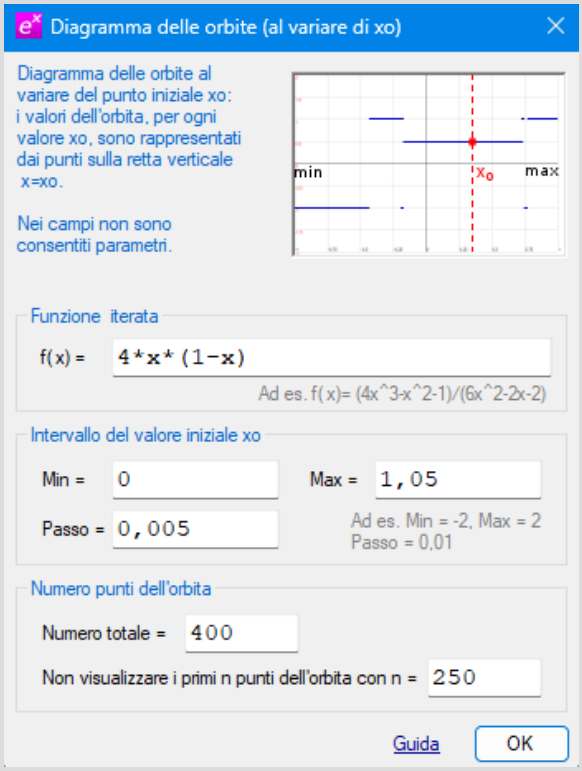
Ben diversa la situazione nel secondo caso in cui $r=4$ (quindi $r>r_\infty$); la figura seguente mostra il diagramma con relative impostazioni.

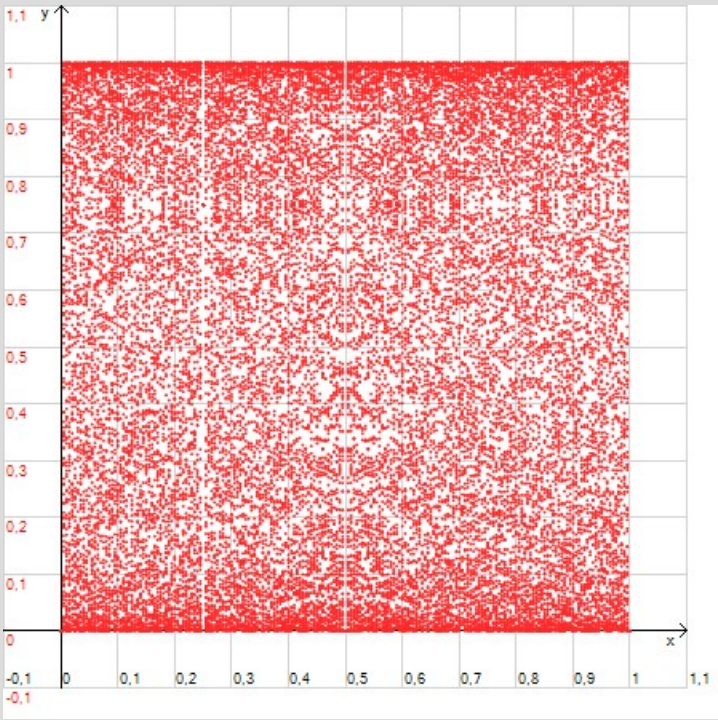




Osservando la figura si direbbe che non esistono orbite convergenti ad orbite cicliche asintoticamente stabili; se infatti l'orbita di un punto x_0 convergesse ad un ciclo asintoticamente stabile dovremmo vedere in corrispondenza di un intorno di x_0 uno o più segmenti paralleli all'asse delle y. Il comportamento asintotico delle orbite sembra essere del tutto imprevedibile, con qualche eccezione: qui si vede che l'orbita di 0,25 converge al punto fisso 0,75 e l'orbita di 1 converge al punto fisso 0 (0,25 e 1 sono punti definitivamente periodici) e sono osservabili anche i due punti fissi 0 e 0,75, entrambi **instabili**. Si tratta però di situazioni particolari, in generale orbite con dipendenza sensibile alle condizioni iniziali non saranno osservabili mediante un computer.

La figura seguente mostra lo stesso diagramma con passo 0,005.





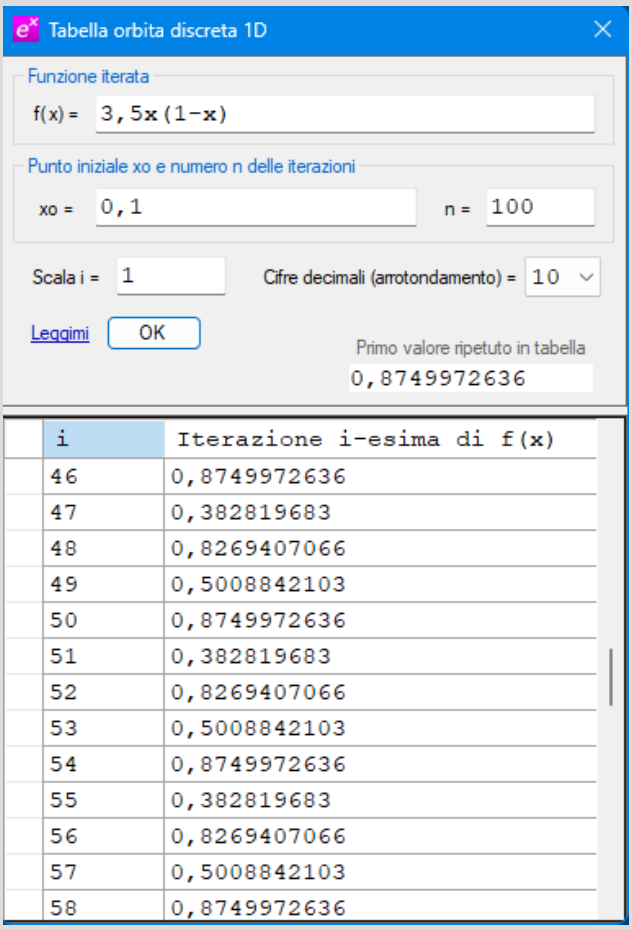
Esempio 10

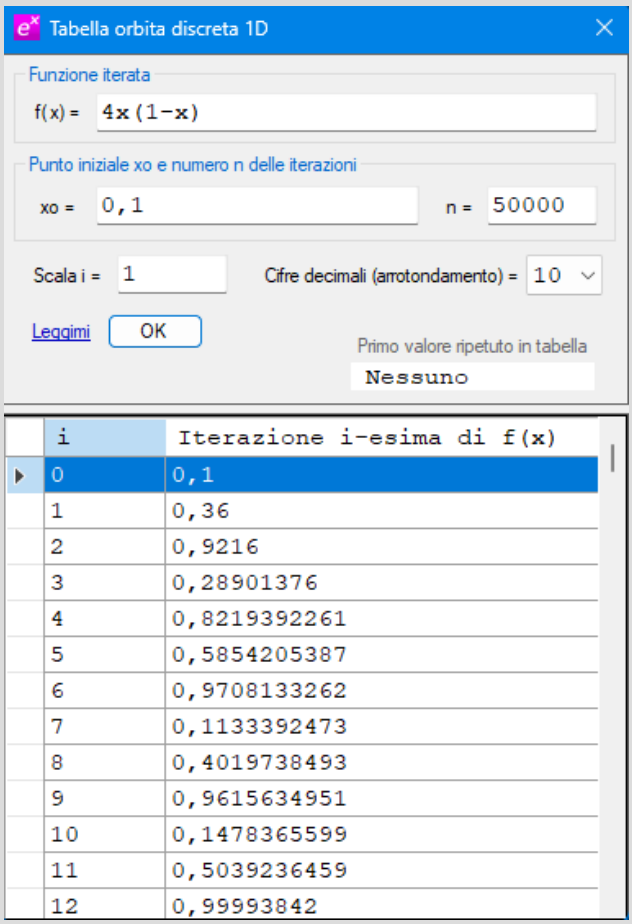
Utilizzando lo strumento *Tabella orbita discreta 1D* con arrotondamento a 10 cifre decimali eseguire le seguenti due verifiche:

1) Verificare che dopo qualche decina di iterazioni della funzione logistica $f(x)=3{,}5x(1-x)$ con punto iniziale $x_0=0{,}1$, i valori $f^n(x_0)$ dell'orbita si stabilizzano su un 4-ciclo.

2) Verificare che le prime 50000 iterazioni $f^n(x_0)$ della funzione logistica $f(x)=4x(1-x)$ con punto iniziale $x_0=0{,}1$ sono tutte distinte.

Le figure seguenti mostrano le due tabelle, notare il campo a sola lettura *Primo valore ripetuto in tabella* che ci consente di fare rapidamente queste verifiche.





Nel primo caso siamo nell'intervallo di r in cui le orbite tendono a un 4-ciclo (vedi esempio 8) e, come ci aspettavamo, l'orbita di $x_0=0,1$ converge al 4-ciclo stabile {0,8749972636, 0,382819683, 0,8269407066, 0,5008842103}. Ben diversa la situazione nel secondo caso in cui $r=4$ (quindi $r > r_\infty$): le prime 50000 iterazioni sono tutte **distinte**, l'orbita sembra essere **aperiodica**.

L'ultimo esempio ci ha presentato una situazione decisamente nuova: un'orbita **limitata** (f(x)=4x(1-x) applica [0, 1] in [0, 1]) che sembra essere **aperiodica**. Naturalmente il fatto di aver verificato che i primi 50000 valori dell'orbita sono tutti distinti **non dimostra** che l'orbita è aperiodica, è solo un indizio. La dimostrazione non può che essere teorica, non sperimentale. E' una dimostrazione relativamente semplice, vale la pena di esaminarla.

Dimostriamo che l'orbita di $x_0=0,1$ per iterazione della funzione logistica $f(x)=4x(1-x)$ è **aperiodica** cioè tutte le iterazioni $x_n=f^n(x)$ sono **distinte**.

Osserviamo che tutte le iterazioni x_n appartengono all'intervallo [0, 1], basta infatti tener conto del grafico della parabola $y=4x(1-x)$; inoltre tutte le iterazioni x_n con punto iniziale $x_0=1/10$ sono numeri razionali p_n/q_n con p_n e q_n numeri interi positivi e $p_n \le q_n$.

Dimostriamo per induzione che tutte le iterazioni x_n (n>0) possono essere rappresentate con una frazione ridotta ai minimi termini p_n/q_n dove q_n *è una* potenza di 5 maggiore di q_{n-1}.

<u>Passo base</u> $x_2=576/625$, $x_1=9/25$.

<u>Passo induttivo</u> Supponiamo che $x_n = p_n/q_n$ (n>2) sia ridotta ai minimi termini e q_n sia una potenza di 5. Si ha

$$x_{n+1}=4x_n(1-x_n)=\frac{4p_n(q_n-p_n)}{q_n^2}$$

Mostriamo che la frazione è ridotta ai minimi termini, mostriamo cioè che il numeratore della frazione x_{n+1} non è divisibile per 5 (il denominatore è una potenza di 5, se il numeratore non è divisibile per 5, la frazione è necessariamente ai minimi termini); poiché 5 non divide p_n, non divide nemmeno q_n-p_n (infatti se 5 dividesse q_n-p_n si avrebbe $5k=5k'-p_n$, con k e k' numeri interi positivi, da cui seguirebbe che 5 divide p_n contro l'ipotesi che p_n/q_n sia ridotta ai minimi termini). Inoltre $q_{n+1}=q_n^2$ è evidentemente una potenza di 5 maggiore di q_n.

Dal fatto che le frazioni p_n/q_n ridotte ai minimi termini con denominatori q_n strettamente crescenti sono necessariamente tutte distinte segue la tesi.

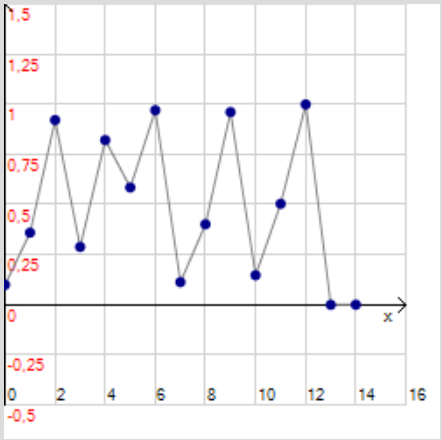
Esempio 11 (Butterfly effect)

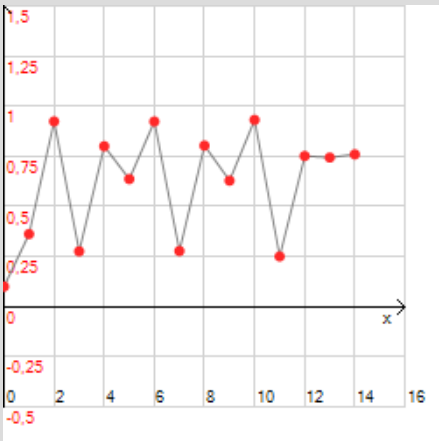
At one point I decided to repeat some of the computations in order to examine what was happening in greater detail. I stopped the computer, typed in a line of numbers that it had printed out a while earlier, and set it running again. I went down the hall for a cup of coffee and returned after about an hour, during which time the computer had simulated about two months of weather. The numbers being printed were nothing like the old ones.

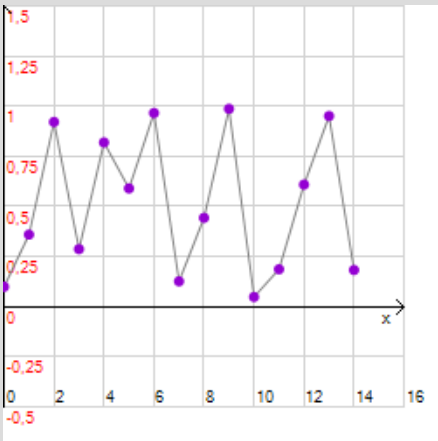
E. N. Lorenz, The Essence of Chaos

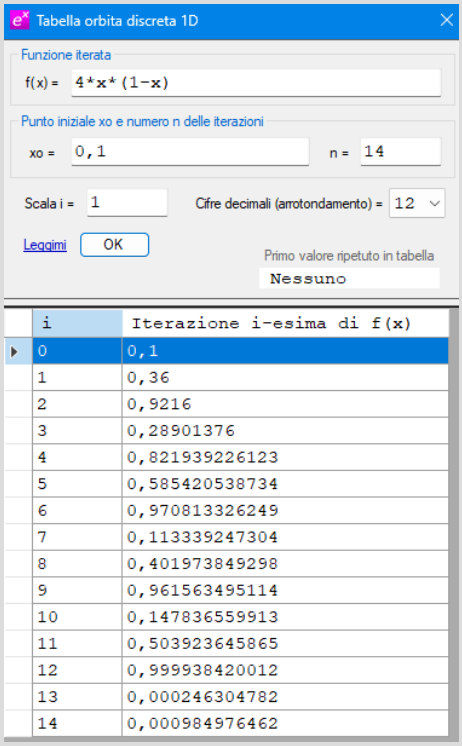
Verificare in qualche caso la dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali per la mappa logistica f(x)=4x(1-x).

Le figure seguenti mostrano il grafico delle prime 14 iterazioni di *f(x)=4x(1-x)* con punti iniziali rispettivamente $x_0=0,1$, $x_0=0,1+$***0,001***, $x_0=0,1+$***0,0001*** e le rispettive tabelle con 12 cifre decimali. Come si vede, anche piccole perturbazioni del punto iniziale x_0 determinano dopo poche iterazioni orbite completamente diverse. Lo stesso accadrebbe se venisse perturbato un qualsiasi valore x_n dell'orbita.

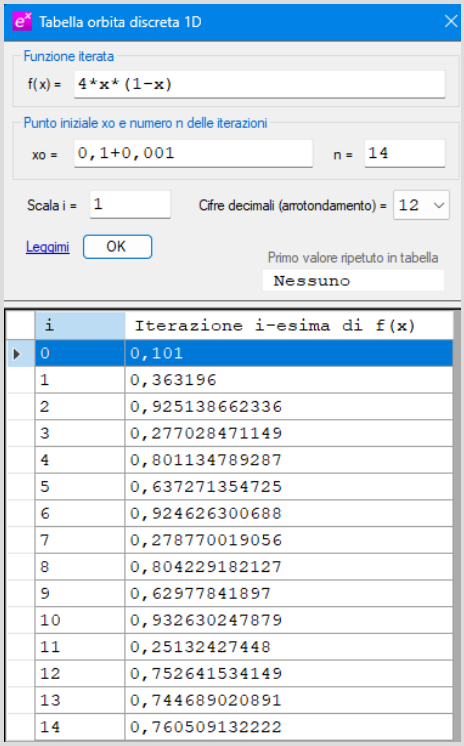




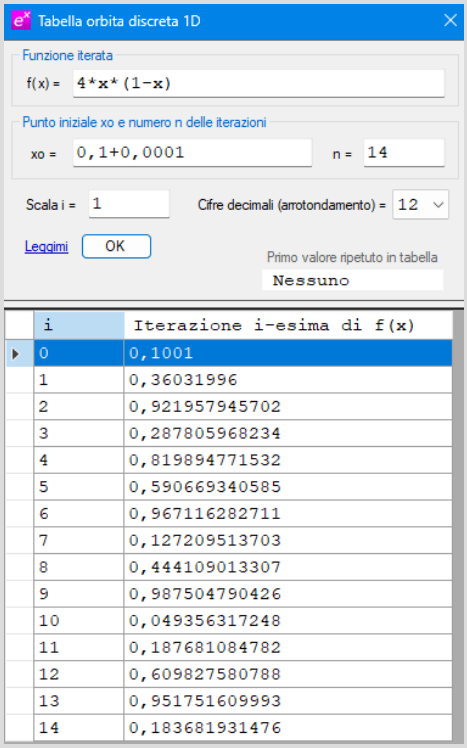




i	Iterazione i-esima di f(x)
0	0,1
1	0,36
2	0,9216
3	0,28901376
4	0,821939226123
5	0,585420538734
6	0,970813326249
7	0,113339247304
8	0,401973849298
9	0,961563495114
10	0,147836559913
11	0,503923645865
12	0,999938420012
13	0,000246304782
14	0,000984976462



i	Iterazione i-esima di f(x)
0	0,101
1	0,363196
2	0,925138662336
3	0,277028471149
4	0,801134789287
5	0,637271354725
6	0,924626300688
7	0,278770019056
8	0,804229182127
9	0,62977841897
10	0,932630247879
11	0,25132427448
12	0,752641534149
13	0,744689020891
14	0,760509132222



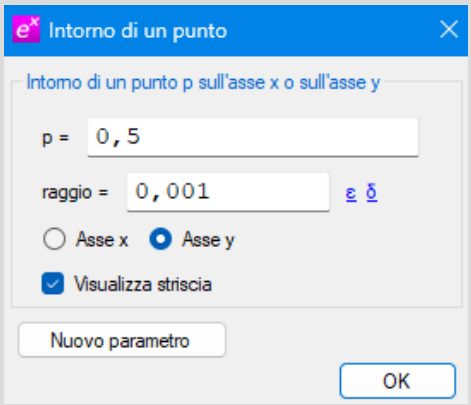
i	Iterazione i-esima di f(x)
0	0,1001
1	0,36031996
2	0,921957945702
3	0,287805968234
4	0,819894771532
5	0,590669340585
6	0,967116282711
7	0,127209513703
8	0,444109013307
9	0,987504790426
10	0,049356317248
11	0,187681084782
12	0,609827580788
13	0,951751609993
14	0,183681931476

E' anche interessante osservare il comportamento sostanzialmente diverso se iteriamo, ad es., la mappa logistica *f(x)=3,5x(1-x)* con gli stessi punti iniziali (qui c'è la presenza di un ciclo attrattivo).

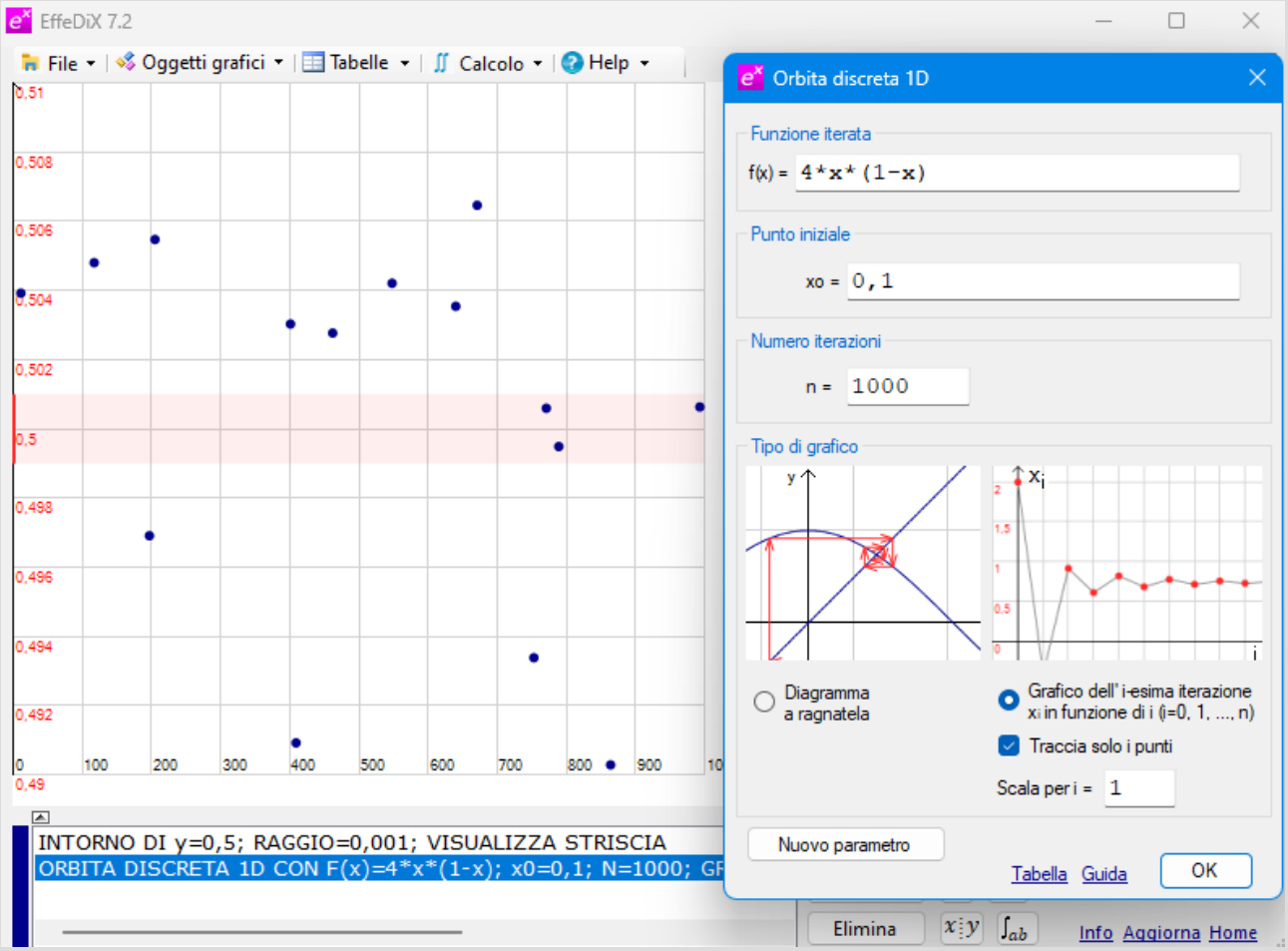
Esempio 12 (Densità dell'orbita)

Considerare un punto **qualsiasi** *p* interno all'intervallo [0, 1] e un suo intorno $I=(p-\epsilon, p+\epsilon)$ tutto contenuto nell'intervallo [0, 1] con $\epsilon > 0$ anche **arbitrariamente piccolo**, ad esempio l'intorno (0,5**-0,001**; 0,5**+0,001**) di *p=0,5.* Verificare che operando un numero di iterazioni sufficientemente grande della funzione logistica *f(x)=4x(1+x)*, con punto iniziale x_0=0,1, ci sono punti dell'orbita che cadono all'interno dell'intorno *I*.

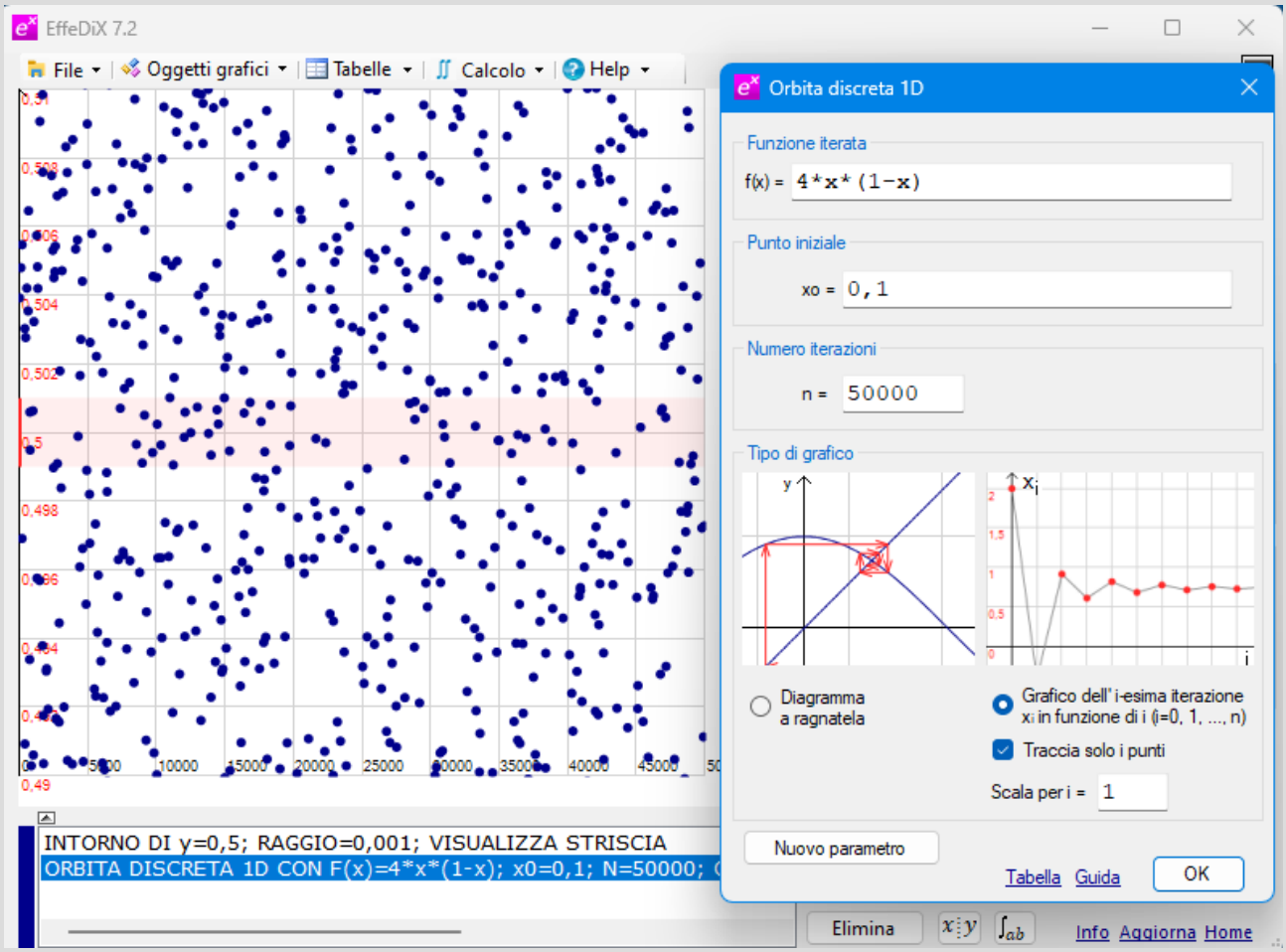
Per visualizzare l'intorno utilizzare l'opzione *Oggetti grafici – Intorno di un punto* (vedi figura a fianco); impostare poi una regione di piano con *x* compreso tra 0,49 e 0,51 con 10 intervalli e *y* compreso tra 0 e 1000 con 10 intervalli (pulsante *Imposta*, scheda *Piano*).



La figura seguente mostra che con 1000 iterazioni ci sono già tre punti dell'orbita che cadono nell'intorno considerato.



La figura seguente mostra la stesso intorno con 50000 iterazioni (impostare un'escursione da 0 a 50000 con 10 intervalli sull'asse delle *x*).



Gli esperimenti fatti con EffeDiX ci forniscono dei forti indizi sul fatto che l'orbita in questione sia densa nell'intervallo [0, 1]; in effetti è proprio così, si può dimostrare infatti che la maggior parte delle orbite generate per iterazione della funzione logistica *f(x)=4x(1-x)* sono dense in [0, 1]. Ricordiamo che un sottoinsieme *A* di un intervallo [a, b] di numeri reali si dice *denso in [a, b]* se comunque scelto un intervallo aperto *I* contenuto in [a, b], esiste almeno un elemento di *A* che appartiene ad *I.*

Alla luce degli esempi precedenti, riassumiamo i fatti che conosciamo a proposito dell'orbita di $x_0=0,1$ per iterazione della funzione logistica *f(x)=4x(1-x)*.

1. E' limitata, tutti i valori x_n appartengono all'intervallo [0, 1].

2. Non è, ovviamente, divergente.

3. Non è convergente, se lo fosse dovrebbe convergere ad un punto fisso di *f(x)=4x(1-x)*, ma i due punti fissi sono entrambi repulsivi (vedi esempio 7).

4. E' aperiodica, lo abbiamo dimostrato.

5. Potrebbe convergere ad un ciclo periodico? Potrebbe, anche se l'esempio 9 ci suggerisce, per via sperimentale, che non sia così. Tenete presente che un'orbita aperiodica può comunque convergere ad un ciclo; se ritornate all'esempio 5, osserverete che l'orbita di $x_0=1/2$ converge ad un ciclo di periodo 2 pur essendo tutti i suoi valori x_n distinti (quest'ultimo fatto si dimostra facilmente per induzione); in questo caso però il ciclo di periodo 2 è attrattivo. Nel caso della mappa logistica $f(x)=4x(1-x)$ si può dimostrare che **tutti** i punti periodici sono repulsivi[3]. Quindi dobbiamo escludere anche la convergenza ad un ciclo periodico.

6. La più piccola perturbazione $x_0 + \epsilon$ del valore iniziale x_0 produce un'orbita completamente diversa (e lo stesso accade perturbando un qualsiasi valore x_n dell'orbita). In un certo senso un'orbita di questo tipo è praticamente inconoscibile **mediante calcolo numerico**, piccoli errori di arrotondamento (a causa della precisione finita di un computer) si amplificano con l'iterazione. La situazione è perfettamente descritta dal matematico R. Devaney nel testo *An Introduction to Chaotic Dynamical* Systems:

If a map possesses sensitive dependence on initial conditions, then for all practical purposes, the dynamics of the map defy numerical computation. Small errors in computation which are introduced by round-off may become magnified upon iteration. The results of numerical computation of an orbit, no matter how accurate, may bear no resemblance whatsoever with the real orbit.

7. L'orbita è densa nell'intervallo [0, 1]. Questo fatto, che abbiamo intuito facendo esperimenti con EffeDiX ma che si può dimostrare, ha un'implicazione che mostra quanto caotica sia questa orbita: comunque scelto un punto dell'intervallo [0, 1] e comunque scelto un suo intorno, l'orbita "visita" infinite volte tale intorno, il che significa che l'orbita passa infinite volte, vicina quanto si vuole a qualsiasi punto dell'intervallo. Quest'ultimo fatto si dimostra facilmente assumendo la densità dell'orbita e ragionando per assurdo; se infatti esistesse un punto p e un suo intorno I contenuto nell'intervallo [0, 1] in cui cadono solo un numero finito di punti distinti

$$x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{km}$$

dell'orbita, punti che possiamo supporre riordinati in ordine crescente (almeno uno c'è necessariamente, per l'ipotesi di densità), allora non esisterebbe alcun punto dell'orbita strettamente compreso, ad esempio, tra x_{k1} e x_{k2}, il che contraddice l'ipotesi di densità dell'orbita (se il punto fosse unico si arriva alla stessa conclusione).

Per concludere, siamo dunque di fronte ad un nuovo tipo di orbita che viene classificato come orbita **caotica**. La maggior parte delle orbite ottenute per iterazione della mappa logistica con $r_\infty < r < 4$ sono caotiche.

3 Si può dimostrare che se $p \neq 0$ è un punto ciclico di periodo n della mappa logistica $f(x)=4x(1-x)$, il modulo della derivata $df^n(x)/dx$ calcolata in p è $2^n>1$.