

## Trasformazioni del piano (affinità, similitudini, isometrie)

Dato un insieme  $S$  di punti  $(x, y)$  del piano, una matrice quadrata  $A$  di dimensioni  $2 \times 2$  e un vettore  $v$ , EffeDiX può applicare ai punti di  $S$  la trasformazione affine

$$t: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v$$

e tracciare nel piano sia l'insieme  $S$  sia il suo trasformato  $S'$ . L'opzione da utilizzare è *Oggetti grafici – Trasformazione affine di un insieme di punti*.

L'insieme  $S$  deve essere definito mediante un **file .txt** costituito da coppie di dati  $x$ ,  $y$  in formato di tabella (fino a 15000 coppie). Per creare un file di questo tipo ci sono molti modi, eccone alcuni:

- (1) utilizzare l'opzione *Oggetti grafici – Grafico a dispersione*
- (2) utilizzare l'opzione *Oggetti grafici – Tabella curva parametrica*
- (3) utilizzare l'opzione *Oggetti grafici – Luogo di punti*
- (4) utilizzare l'opzione *Tabelle – Tabella  $x, f(x)$*
- (5) utilizzare l'opzione *Oggetti grafici – Filled Julia set*

E' anche possibile applicare la stessa trasformazione o una nuova trasformazione al trasformato  $S'$  ottenendo così un nuovo trasformato  $S''$  (e così via). Nota: l'insieme  $S$  e i successivi trasformati di  $S$  sono indicati da EffeDiX con i simboli:  $S_0, S_1, S_2$ , ecc. Aprendo le finestre degli oggetti  $S_0$  e  $S_1$  (o  $S_1$  e  $S_2$ , ecc.) troverete nell'ordine le coordinate di punti corrispondenti.

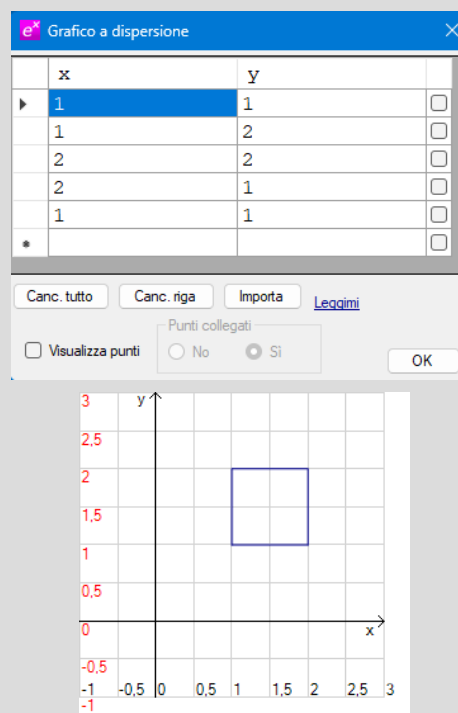
Ricordiamo che una trasformazione affine **non degenere** (cioè biettiva)  $t$  del piano è caratterizzata dal fatto che trasforma rette in rette. Un trasformazione affine non degenere è in particolare **lineare** se fissa l'origine (quindi se  $v$ =vettore nullo).

### Esempio 1

Creare il file *quadrato.txt* per tracciare il quadrato  $Q_1$  di vertici:

$$(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1)$$

Useremo l'opzione *Oggetti grafici – Grafico a dispersione*. La figura a fianco mostra la finestra d'impostazione, notare che per chiudere il quadrato serve un punto in più che deve coincidere col primo.

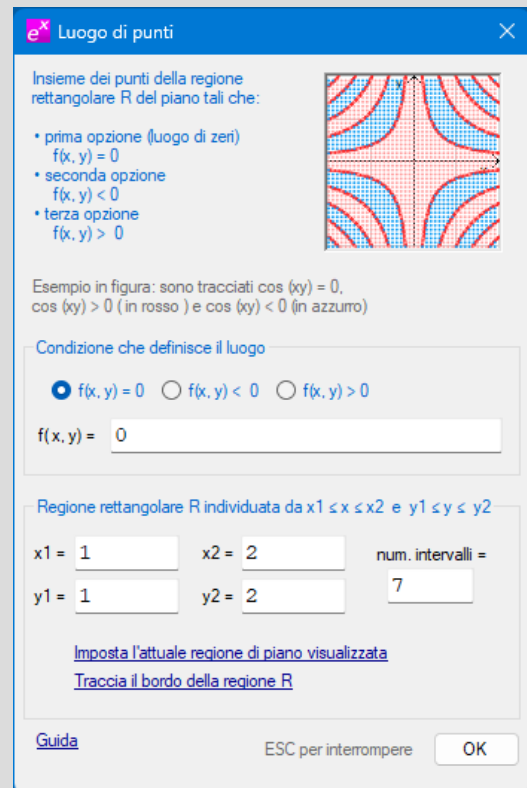
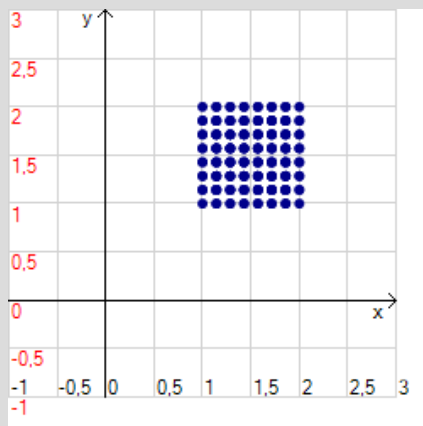


Per salvare il file fare clic col pulsante destro del mouse sulla tabella e selezionare l'opzione *Salva dati su file (.txt)*.

## Esempio 2

Creare il file *quadrato\_pieno.txt* per tracciare il quadrato  $Q_2$  con gli stessi vertici del quadrato  $Q_1$  dell'esempio precedente ma in cui siano presenti un certo numero di punti interni equidistribuiti.

Useremo l'opzione *Oggetti grafici – Luogo di punti*. La figura a fianco mostra la finestra d'impostazione. Dando l'ok sarà generato un grafico a dispersione **di cui aprirete la finestra**; a questo punto procederete come già visto nel es. precedente per salvare il file.



Nota: vengono tracciati **tutti** i punti della regione  $[1, 2] \times [1, 2]$  con 7 intervalli perché la funzione  $f(x, y)$  impostata è identicamente uguale a 0 e il luogo di zeri è  $f(x, y)=0$ .

## Esempio 3 (proprietà di una trasformazione affine)

Applica la trasformazione affine  $t$  individuata dalla matrice

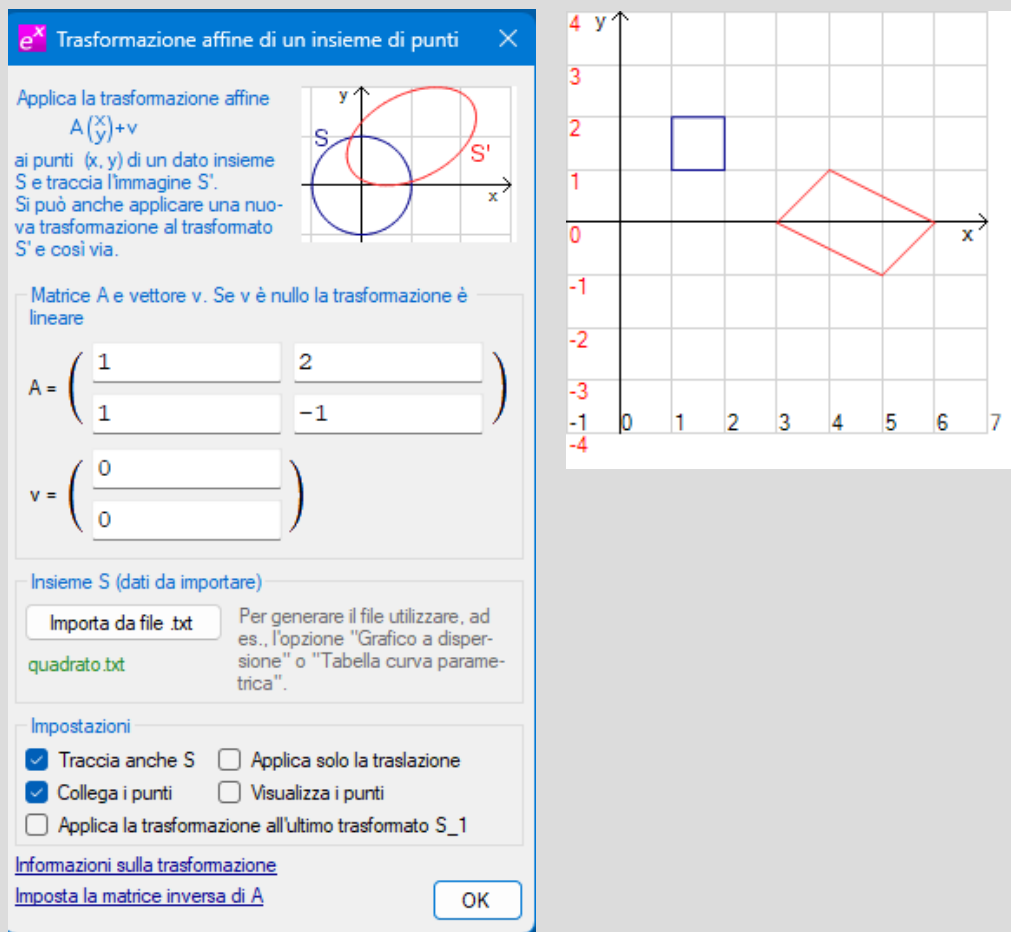
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ e dal vettore } v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

al quadrato  $Q_1$  dell'esempio 1. Cosa si può osservare?

In questo caso il vettore  $v$  è nullo, la trasformazione

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

è lineare; possiamo anche esprimerla mediante le equazioni  $x'=x+2y$ ,  $y'=x-y$ . La figura seguente mostra la finestra d'impostazione per applicare la trasformazione al quadrato  $Q_1$ .



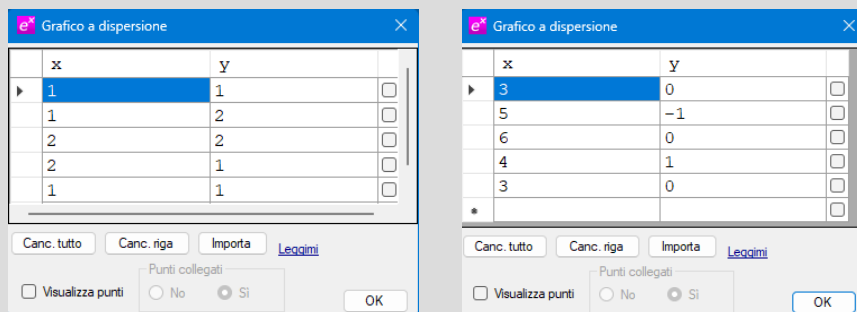
Osservazioni.

(1) La trasformazione porta punti distinti in punti distinti, è biettiva; condizione necessaria e sufficiente affinché ciò accada è che la matrice  $A$  sia **non singolare** (quindi invertibile) e ciò accade se il suo determinante è non nullo, come nel nostro caso.

(2) Il quadrato si trasforma in un parallelogramma, **si conserva il parallelismo** (lati paralleli si trasformano in lati che sono ancora paralleli); questa è una proprietà generale di tutte le trasformazioni affini (non degeneri): rette parallele sono trasformate in rette che sono ancora parallele. Non si conservano invece lunghezze di lati corrispondenti e le ampiezze di angoli corrispondenti (in generale una trasformazione affine non conserva la distanza tra due punti e non conserva gli angoli ma in alcuni casi importanti, che esamineremo, potrebbe esserci la conservazione).

(3) La trasformazione ha mutato l'orientamento della figura: nel quadrato i vertici si susseguono in senso orario mentre nel parallelogramma in senso

antiorario; per verificarlo devi aprire le tabelle relative alle due trasformazioni facendo clic col pulsante destro del mouse sui relativi oggetti presenti nel box sotto il piano cartesiano (vedi le figure seguenti, la prima si riferisce all'insieme  $S_0$  la seconda al trasformato  $S_1$ ).

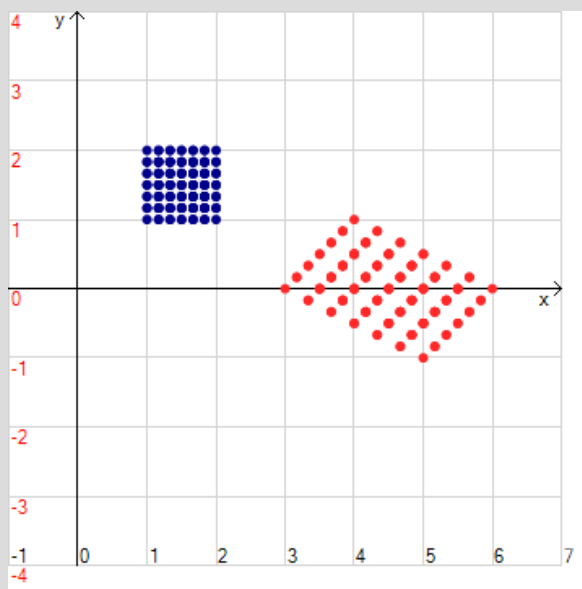


Come vedi il punto (1, 1) va nel punto (3, 0), (1, 2) va in (5, -1) e così via. In generale se il determinante della matrice A è negativo si inverte l'orientamento della figura, se è positivo si conserva. Nel nostro caso il determinante vale -3.

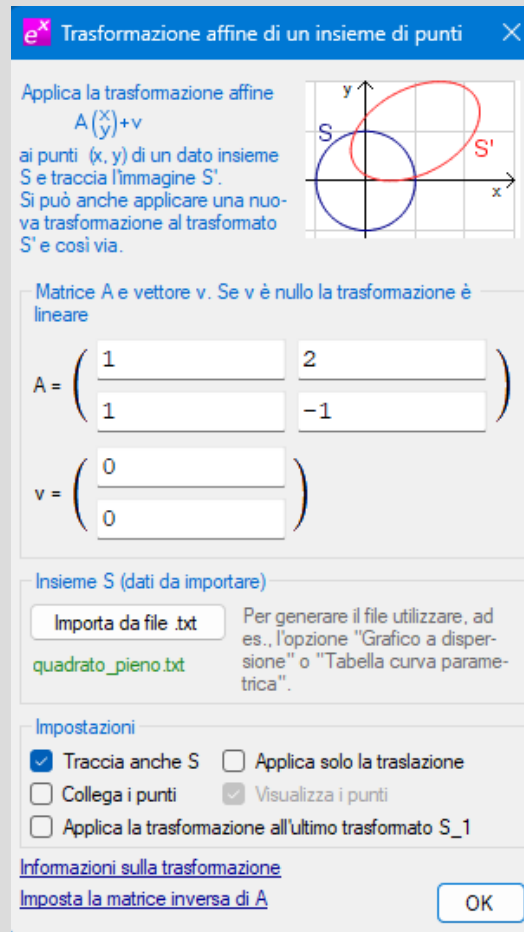
(4) E' facile calcolare, per sottrazione, l'area della figura trasformata: è 3, mentre l'area del quadrato di partenza è 1. In generale se  $S'$  è la trasformata per affinità (non degenera) di una regione piana  $S$ , la relazione tra le aree è la seguente:

$$area(S') = |\det(A)| \cdot area(S)$$

(5) La figura a fianco mostra la stessa trasformazione applicata al quadrato  $Q_2$  dell'esempio 2 (quadrato\_pieno.txt) che ha gli stessi vertici di  $Q_1$ ; qui però abbiamo la conferma visiva che punti allineati si trasformano in punti allineati (cioè la trasformazione porta rette in rette), proprietà che **caratterizza** le trasformazioni affini non degeneri. Anche il fatto che un quadrilatero sia trasformato in un quadrilatero e che in generale si conservi il numero dei lati di un poligono discende dalla conservazione dell'allineamento (e dalla biiettività).



Nota. Quando operate su una regione piana definita dai punti interni anziché su un poligono definito dai vertici ricordatevi di **togliere**, nella finestra d'impostazione, la spunta alla casella "Collega i punti" (vedi figura seguente). La dimensione dei punti può essere cambiata a seconda dei casi mediante il pulsante "Imposta" (scheda "Prossimo oggetto", box "Punto")



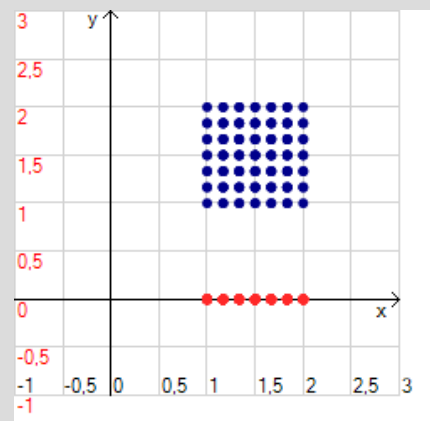
### Esempio 4 (matrice A singolare)

Applica la trasformazione affine  $t$  individuata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e dal vettore } v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

al quadrato  $Q_1$  dell'esempio 1. Cosa si può osservare?

In questo caso EffeDiX vi segnala che la matrice  $A$  è singolare, il suo determinante è nullo, la trasformazione non è biiettiva, tutto il piano "collassa" sull'asse delle  $x$ , l'immagine del quadrato è un segmento.



### Esempio 5

Un'affinità trasforma coniche in coniche dello stesso tipo. Applica alla circonferenza unitaria con centro nell'origine una qualsiasi affinità e verifica che la curva trasformata è un'ellisse.

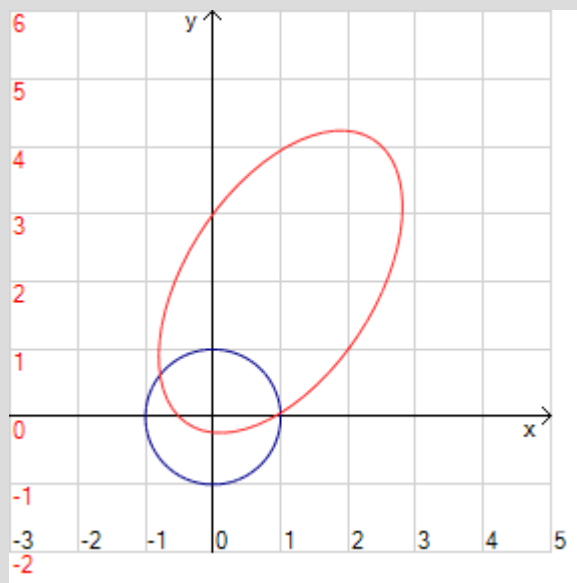
Consideriamo ad esempio l'affinità  $t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Utilizziamo l'opzione *Tabella curva parametrica* per generare il file *circonferenza.txt* (vedi figura a fianco). Per salvare il file fare clic col pulsante destro sulla tabella.

Le finestre seguenti mostrano la finestra d'impostazione della trasformazione e il risultato.

Per approssimare l'equazione cartesiana dell'ellisse utilizza l'opzione *Oggetti grafici – Conica per 5 punti* considerando 5 punti (non troppo vicini) della tabella relativa all'insieme S\_1 dei punti trasformati.

t	x(t)	y(t)
0	1	0
0,1	0,995004165278	0,099833416647
0,2	0,980066577841	0,198669330795
0,3	0,955336489126	0,295520206661
0,4	0,921060994003	0,389418342309
0,5	0,87758256189	0,479425538604
0,6	0,82533561491	0,564642473395
0,7	0,764842187284	0,644217687238
0,8	0,696706709347	0,7173560909
0,9	0,621609968271	0,783326909627
1	0,540302305868	0,841470984808
1,1	0,453596121426	0,891207360061
1,2	0,362357754477	0,932039085967



### Esempio 6 (tutti i triangoli sono affini)

Dati tre punti non allineati  $P, Q, R$  e tre punti non allineati  $P', Q', R'$  esiste una e una sola trasformazione affine del piano che porta  $P$  in  $P', Q$  in  $Q', R$  in  $R'$ ; da ciò segue che tutti i triangoli del piano sono affini. Verificare che scegliendo come si vuole due triangoli nel piano, esiste un'unica affinità che trasforma l'uno nell'altro.

Scegliamo ad esempio i due triangoli:

$$P(-2, -1), Q(0, 1), R(1, 0)$$

$$P'(1, 2), Q'(2, 4), R'(3, 2)$$

Posto  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  e  $v = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$  dobbiamo risolvere il sistema lineare di 6 equazioni in 6 incognite seguente:

$$\begin{aligned} -2a - b + e &= 1 \\ -2c - d + f &= 2 \\ b + e &= 2 \\ d + f &= 4 \\ a + e &= 3 \\ c + f &= 2 \end{aligned}$$

Ad es. le prime due equazioni rappresentano il sistema  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e così via per le altre coppie di equazioni.

Per risolvere il sistema useremo l'opzione *Calcolo – Soluzioni sistema lineare*, la figura a fianco mostra la finestra d'impostazione.

Attenzione ai coefficienti delle equazioni da inserire nella matrice incompleta, tener presente che le incognite sono nell'ordine:  $a, b, c, d, e, f$  e alcuni loro coefficienti sono nulli.

Le figure seguenti mostrano la finestra d'impostazione per eseguire la trasformazione e il risultato.

Sistema lineare (n equazioni, n incognite)

Sistema lineare, n equazioni, n incognite  $Ax = b$  n = 6

A = matrice n x n incompleta (matrice dei coeff.)  
 x = vettore incognite, b = vettore termini noti  
 (A | b) = matrice n x (n+1) completa

Matrice completa (in azzurro la colonna dei termini noti)

-2	-1	0	0	1	0	1
0	0	-2	-1	0	1	2
0	1	0	0	1	0	2
0	0	0	1	0	1	4
1	0	0	0	1	0	3
0	0	1	0	0	1	2

OK

Soluzione

x1=	0.75
x2=	-0.25
x3=	-0.5
x4=	1.5
x5=	2.25
x6=	2.5

rango(A) = 6  
 rango (A | b) = 6  
 Dim. ker(A) = 0  
 Parametri liberi = 0

Il sistema ha un'unica soluzione

**Trasformazione affine di un insieme di punti**

Applica la trasformazione affine  $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v$  ai punti  $(x, y)$  di un dato insieme  $S$  e traccia l'immagine  $S'$ . Si può anche applicare una nuova trasformazione al trasformato  $S'$  e così via.

Matrice  $A$  e vettore  $v$ . Se  $v$  è nullo la trasformazione è lineare

$$A = \begin{pmatrix} 0,75 & -0,25 \\ -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 2,25 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

Insieme  $S$  (dati da importare)

Importa da file .txt Per generare il file utilizzare, ad es., l'opzione "Grafico a dispersione" o "Tabella curva parametrica".

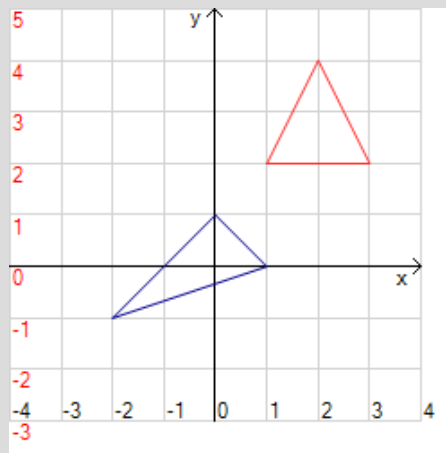
triangolo.txt

Impostazioni

- Traccia anche  $S$      Applica solo la traslazione
- Collega i punti     Visualizza i punti
- Applica la trasformazione all'ultimo trasformato  $S_1$

[Informazioni sulla trasformazione](#)  
[Imposta la matrice inversa di  \$A\$](#)

OK



Nota. Poiché un parallelogramma è individuato da tre punti non allineati anche tutti i parallelogrammi sono affini (ma non sono tutti affini i quadrilateri che godono, in generale, di un ulteriore grado di libertà).

**Esempio 7** (ancora proprietà di un'affinità)

Considera il quadrettato  $Q$  delle figure seguenti.

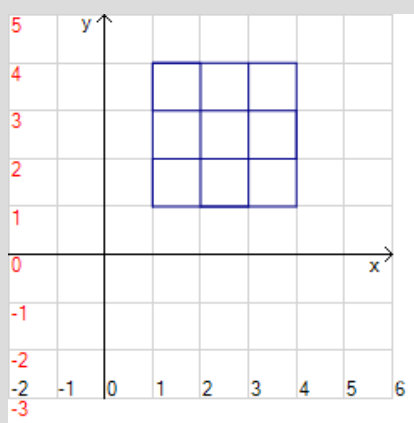
**Grafico a dispersione**

x	y	
1	1	<input type="checkbox"/>
1	4	<input type="checkbox"/>
4	4	<input type="checkbox"/>
4	1	<input type="checkbox"/>
1	1	<input type="checkbox"/>
1	2	<input type="checkbox"/>
4	2	<input type="checkbox"/>
4	3	<input type="checkbox"/>
1	3	<input type="checkbox"/>
1	4	<input type="checkbox"/>
2	4	<input type="checkbox"/>
2	1	<input type="checkbox"/>
3	1	<input type="checkbox"/>
3	4	<input type="checkbox"/>

Canc. tutto    Canc. riga    Importa    [Leggimi](#)

Punti collegati  
 Visualizza punti     No     Sì

OK

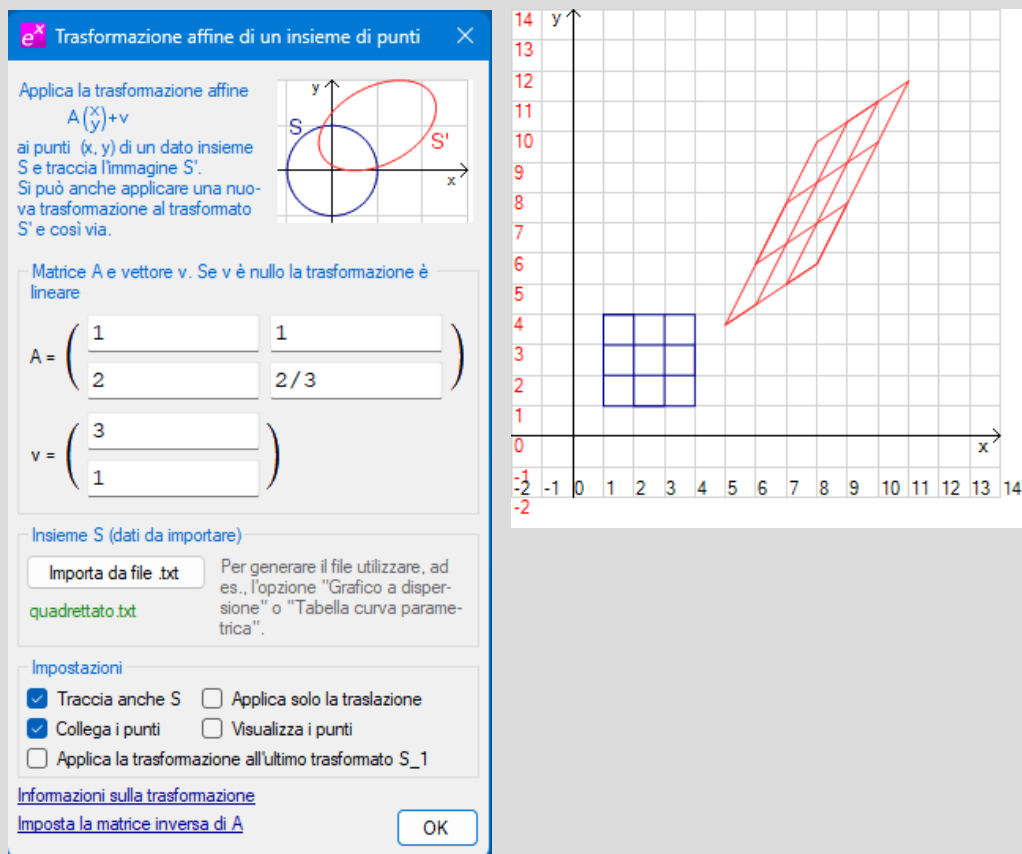


Applica a  $Q$  una **qualsiasi** trasformazione affine non degenera e verifica che:

- (1) si conserva il rapporto tra segmenti situati su una stessa retta (cioè tale rapporto è uguale a quello dei corrispondenti);
- (2) si conserva il rapporto tra le aree di regioni corrispondenti.

Applichiamo ad esempio la trasformazione affine

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Osservando il risultato della trasformazione, ci rendiamo conto che la distanza tra punti corrispondenti non si conserva ma **si conserva** il rapporto  $1/3$  tra il lato del quadrettato  $Q$  e il lato di un quadretto di  $Q$  che si trova sulla stessa retta o su una retta parallela (cioè tale rapporto è lo stesso se consideri i corrispondenti in  $Q$ ); **non si conserva** invece il rapporto tra segmenti che non sono su rette parallele (ad esempio il rapporto tra lati consecutivi di  $Q$  è  $1$  mentre è diverso da  $1$  in  $Q'$ ). Si conserva inoltre il rapporto tra aree di regioni corrispondenti, ad esempio l'area di ciascun quadratino di  $Q$  è  $1/9$  dell'area di  $Q$  e l'area di ciascun piccolo parallelogramma di  $Q'$  è ancora un  $1/9$  dell'area di  $Q'$ .

**Esempio 8** (composizione di due trasformazioni lineari, prodotto di due matrici)

Considera il quadrato  $Q_1$  dell'esempio 1 (quadrato.txt) e opera **in sequenza** due trasformazioni lineari  $t_1$  e  $t_2$  individuate dalle matrici  $A_1$  e  $A_2$  (prima applicherai  $t_1$  al quadrato iniziale ottenendo un parallelogramma  $Q_1'$ , poi applicherai  $t_2$  a  $Q_1'$  ottenendo un parallelogramma  $Q_1''$ ). Verifica che puoi andare direttamente da  $Q_1$  a  $Q_1''$  mediante la trasformazione lineare individuata dal prodotto matriciale  $A_2 \cdot A_1$  (attenzione all'ordine, il prodotto di matrici non commuta).

Consideriamo ad esempio le due trasformazioni lineari

$$t_1: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad t_2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Eseguiamo come al solito la la prima trasformazione (vedi figure seguenti).

Applica la trasformazione affine  $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v$  ai punti  $(x, y)$  di un dato insieme  $S$  e traccia l'immagine  $S'$ . Si può anche applicare una nuova trasformazione al trasformato  $S'$  e così via.

Matrice  $A$  e vettore  $v$ . Se  $v$  è nullo la trasformazione è lineare

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Insieme  $S$  (dati da importare)

Importa da file .txt Per generare il file utilizzare, ad es., l'opzione "Grafico a dispersione" o "Tabella curva parametrica".

quadrato.txt

Impostazioni

Traccia anche  $S$   Applica solo la traslazione

Collega i punti  Visualizza i punti

Applica la trasformazione all'ultimo trasformato  $S_1$

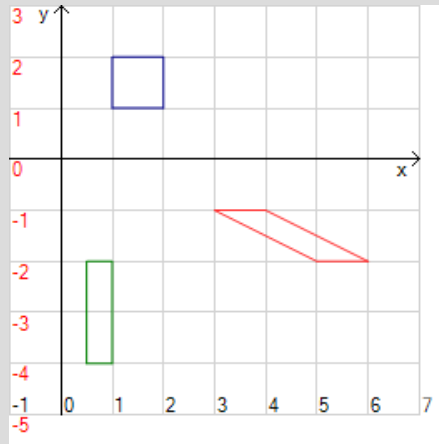
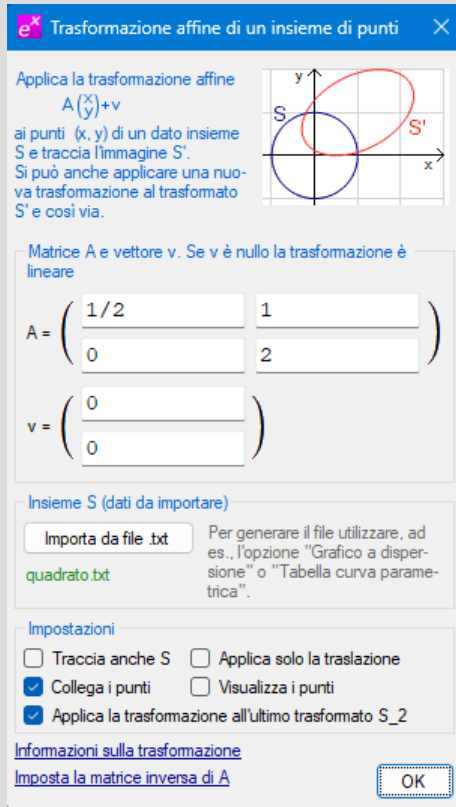
Informazioni sulla trasformazione

Imposta la matrice inversa di  $A$

OK

Ora, prima di eseguire la trasformazione  $t_2$ , **mettiamo la spunta** sulla casella "Applica la trasformazione all'ultimo trasformato  $S_1$ " (se non lo facessimo la trasformazione sarebbe applicata di nuovo al quadrato iniziale).

Le figure seguenti mostrano la nuova situazione.

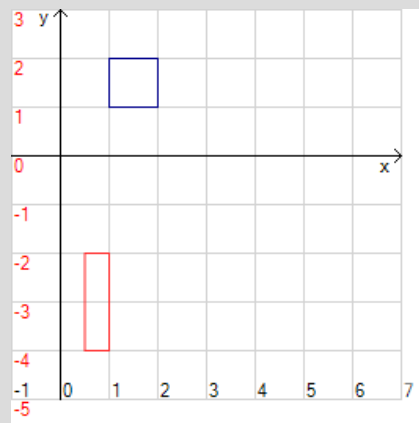
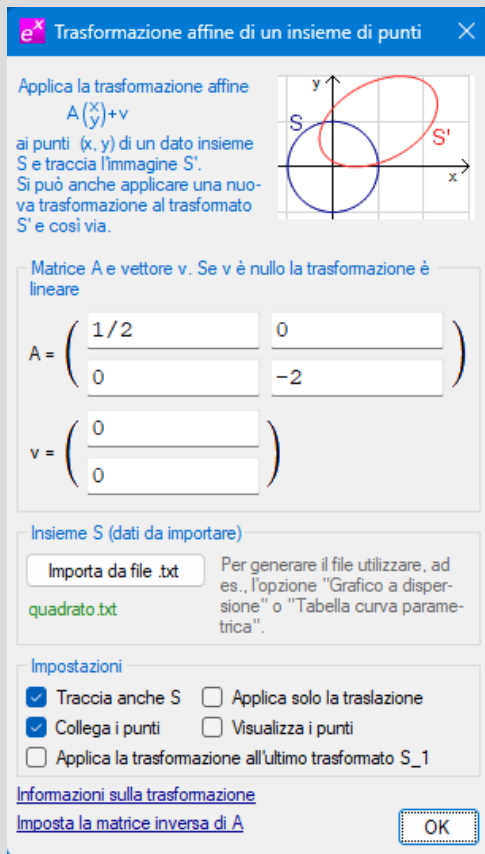


Ora eseguiamo il prodotto  $A_2 \cdot A_1$  delle due matrici nell'ordine inverso rispetto a quello in cui le abbiamo inserite

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e prima di eseguire la trasformazione con la nuova matrice togliamo la spunta alla casella

“Applica la trasformazione all’ultimo trasformato S\_2”, in tal modo la trasformazione sarà applicata al quadrato iniziale (figure seguenti).



Nota. Nel caso della composizione di due trasformazioni affini  $A_1x+v_1$  e  $A_2x+v_2$ , la trasformazione composta è

$$A_2(A_1x+v_1) + v_2 = (A_2 \cdot A_1)x + A_2v_1 + v_2$$

Quindi la parte lineare della composizione è la matrice prodotto  $A_2 \cdot A_1$  e la traslazione è data dal vettore  $A_2v_1 + v_2$ .

**Esempio 9** (inversa di una trasformazione lineare, matrice inversa)

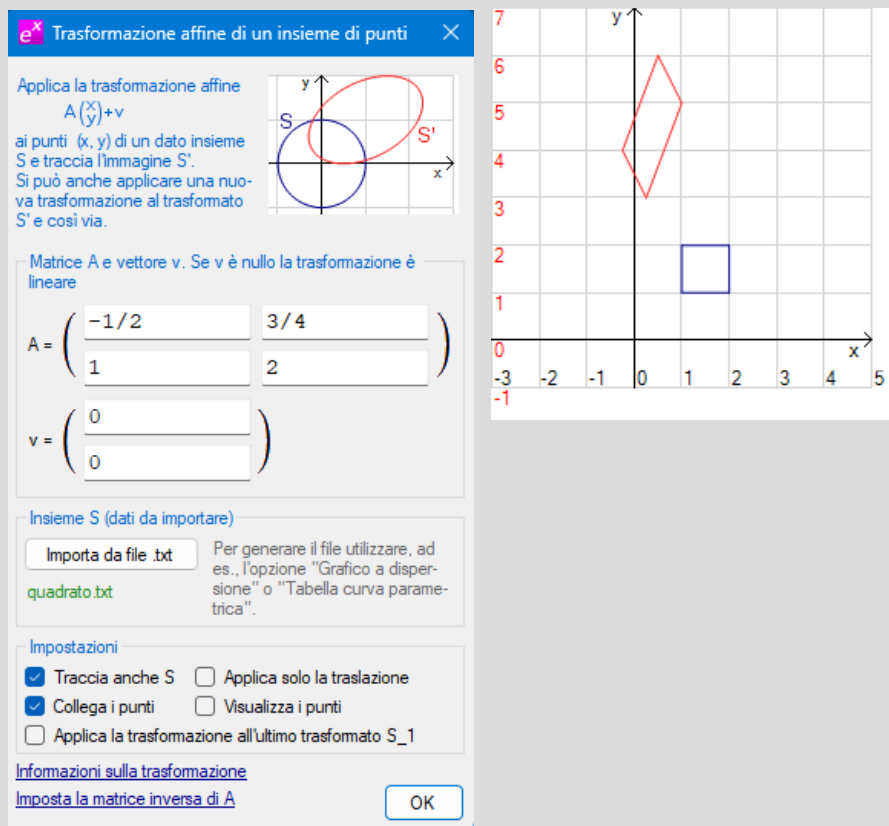
Una trasformazione lineare  $t: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  è invertibile se e solo se lo è la matrice A (cioè se  $\det(A) \neq 0$ ) e la trasformazione inversa è  $t^{-1}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

Considera il quadrato  $Q_1$  dell'esempio 1 e opera una qualsiasi trasformazione lineare invertibile  $t$  che porterà il quadrato  $Q_1$  nel parallelogramma  $Q_1'$ . Applica poi a  $Q_1'$  la trasformazione inversa  $t^{-1}$  e verifica che  $Q_1''$  coincide col quadrato iniziale (dunque la composizione di  $t$  e  $t^{-1}$  non "cambia nulla", è la trasformazione identica e il prodotto  $A^{-1}A$  è la matrice identità).

Consideriamo ad esempio la trasformazione lineare

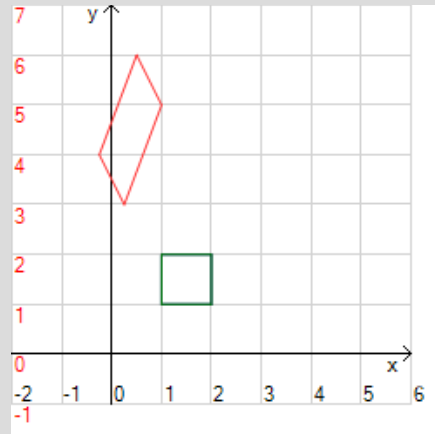
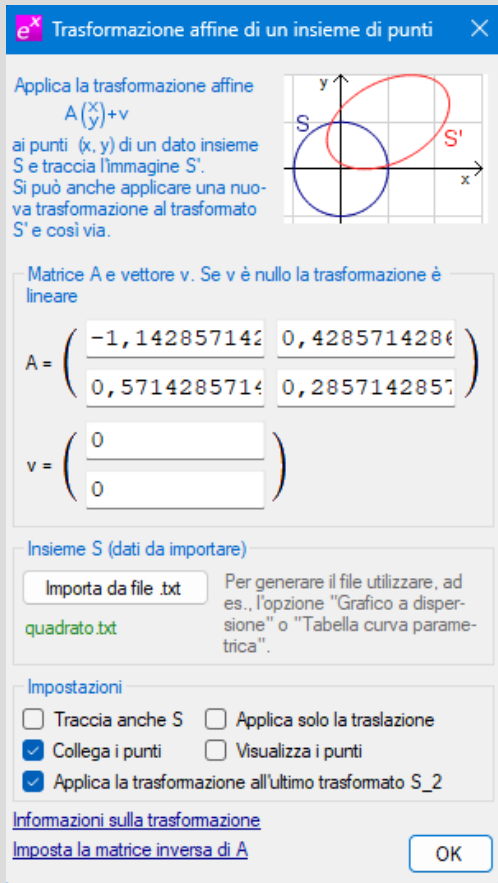
$$t: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e appliciamola al quadrato  $Q_1$  (figure seguenti).



Ora procediamo così:

- 1) facciamo clic sul link "Imposta la matrice inversa di A" che si trova in basso nella finestra d'impostazione; in questo modo avremo sostituito la matrice originaria con la sua inversa  $A^{-1}$ ;
- 2) mettiamo la spunta sulla casella "Applica la trasformazione all'ultimo trasformato S\_1";
- 3) eseguiamo la trasformazione (figure seguenti): il parallelogramma  $Q_1'$  si trasforma nel quadrato iniziale, come ci aspettavamo.



Volendo calcolare a mano l'inversa  $A^{-1}$  della matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  useremo la formula

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d/\det(A) & -b/\det(A) \\ -c/\det(A) & a/\det(A) \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  dove  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  è la matrice identica.

Nota. La trasformazione inversa di una trasformazione affine  $t: u \rightarrow Au+v$ , dove abbiamo indicato con  $u$  il vettore  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , è data da  $A^{-1}u - A^{-1}v$ , sempre che  $A$  sia invertibile. Infatti si ha:

$$t^{-1}(t(u)) = A^{-1}(Au+v) - A^{-1}v = (A^{-1}A)u + A^{-1}v - A^{-1}v = Iu = u$$

## Esempio 10 (similitudini)

### Premessa

Una trasformazione  $t$  del piano è una **similitudine** se esiste un numero reale  $k > 0$ , chiamato **rapporto di similitudine**, tale che per **tutti** i punti  $P$  e  $Q$  si ha

$$\text{distanza}(t(P), t(Q)) = k \text{ distanza}(P, Q)$$

In altre parole, una similitudine è una trasformazione che **moltiplica tutte le distanze per lo stesso fattore positivo**.

Una similitudine ha le seguenti proprietà:

- 1) è una trasformazione biettiva e trasforma rette in rette, quindi è un **particolare** tipo di affinità (non degenera);
- 2) conserva gli angoli;
- 3) conserva la forma.

La matrice  $A$  che caratterizza una similitudine del piano è del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

oppure del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

con  $a^2 + b^2$  non nullo. Nel primo caso la similitudine conserva l'orientamento della figura, nel secondo lo inverte. Inoltre il rapporto di similitudine  $k$  è dato da

$$k = \sqrt{a^2 + b^2}$$

### Esperimento

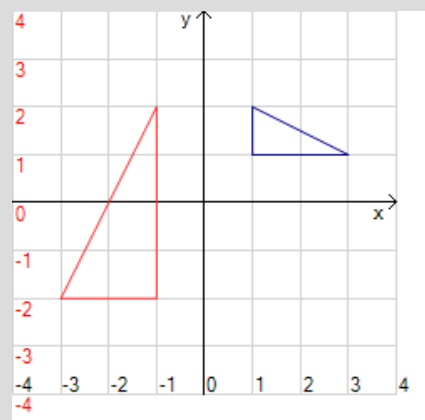
Considera i due triangoli rettangoli in figura: sono evidentemente simili. Determina l'affinità  $t$  che trasforma il triangolo blu nel triangolo rosso; potrai verificare che la matrice  $A$  di tale affinità è del tipo che caratterizza una similitudine.

Punti corrispondenti:

$$P(1, 1), Q(1, 2), R(3, 1)$$

$$P'(-1, -2), Q'(-3, -2), R'(-1, 2)$$

Posto  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  e  $v = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$  dobbiamo risolvere il sistema lineare di 6 equazioni in 6 incognite seguente:



$$\begin{aligned} a+b+e &= -1 \\ c+d+f &= -2 \\ a+2b+e &= -3 \\ c+2d+f &= -2 \\ 3a+b+e &= -1 \\ 3c+d+f &= 2 \end{aligned}$$

(vedi figura a fianco). Quindi l'affinità  $t$  è

$$t: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

e la matrice  $A$  è del tipo che ci aspettavamo. Eseguendo la trasformazione potrai verificare che il triangolo blu viene portato nel triangolo rosso.

Nota. Cambiando la corrispondenza tra i punti ad esempio in questo modo:

$$\begin{aligned} P(1, 1), Q(1, 2), R(3, 1) \\ P'(-3, -2), Q'(-1, -2), R'(-1, 2) \end{aligned}$$

troveresti ancora un triangolo sovrapponibile al trasformato precedente ma non si conserverebbe il rapporto tra lati corrispondenti, quindi la trasformazione sarebbe un'affinità che **non è una similitudine!**

### Esempio 11 (omotetie)

#### Premessa

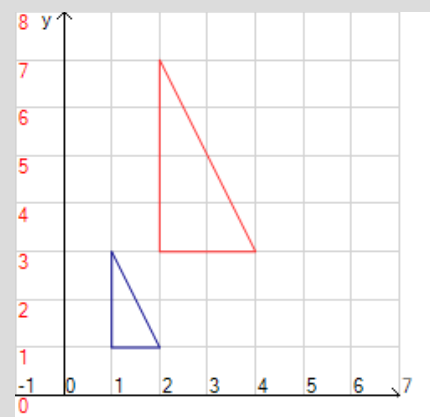
Un'**omotetia**  $t$  di centro  $O = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  è una **similitudine** che conserva la direzione e fissa  $O$ , cioè  $t(O) = O$ . Un'omotetia essendo una **particolare** similitudine è quindi anche una **particolare** affinità. La conservazione della direzione è una condizione più forte della conservazione del parallelismo, significa che ogni retta viene trasformata in una retta parallela o in se stessa. Un'omotetia  $t$  di centro  $O$  ha questa forma

$$t: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (1-a) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad a \neq 0$$

e il rapporto di similitudine è  $|a|$ .

#### Esperimento

Considera i due triangoli rettangoli in figura: sono evidentemente omotetici (sono simili e lati corrispondenti sono paralleli). Determina l'affinità  $t$  che trasforma il triangolo blu nel triangolo rosso; potrai verificare che la trasformazione è del tipo che caratterizza un'omotetia.



Punti corrispondenti:

$$P(1, 1), Q(1, 3), R(2, 1) \\ P'(2, 3), Q'(2, 7), R'(4, 3)$$

Consideriamo una generica affinità con  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  e  $v = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ ; dobbiamo risolvere il sistema lineare di 6 equazioni in 6 incognite seguente:

$$\begin{aligned} a+b+e &= 2 \\ c+d+f &= 3 \\ a+3b+e &= 2 \\ c+3d+f &= 7 \\ 2a+b+e &= 4 \\ 2c+d+f &= 3 \end{aligned}$$

(vedi figura a fianco). Quindi l'affinità  $t$  è

$$t: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ed è del tipo che ci aspettavamo. Il rapporto di similitudine è  $a=2$ . Il centro di omotetia si ricava dall'equazione

$$(1-a) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e dunque è  $(0, -1)$ ; puoi verificare che  $(0, -1)$  è un punto fisso per  $t$ ,  $t(0, -1) = (0, -1)$  ed è l'unico punto fisso. La figura a fianco è stata generata eseguendo la trasformazione; sono anche state tracciate le tre rette per coppie di punti corrispondenti, puoi verificare che si intersecano nel centro di omotetia; inoltre se  $P$  e  $P'$  sono punti corrispondenti si ha

$$\text{distanza}(P', O) = |a| \cdot \text{distanza}(P, O)$$

Nota1. Se  $a=1$  la trasformazione è l'identità, tutti i punti del piano sono fissi e non ha senso parlare di centro di omotetia.

Nota2. Come ulteriore esempio prova a determinare l'omotetia che porta il triangolo blu nel triangolo rosso della figura a fianco. Cosa noti?

Sistema lineare (n equazioni, n incognite)

Sistema lineare, n equazioni, n incognite  $Ax = b$  n= 6

A = matrice n x n incompleta (matrice dei coeff.)  
 x = vettore incognite, b = vettore termini noti  
 (A|b) = matrice n x (n+1) completa

Matrice completa (in azzurro la colonna dei termini noti)

1	1	0	0	1	0	2
0	0	1	1	0	1	3
1	3	0	0	1	0	2
0	0	1	3	0	1	7
2	1	0	0	1	0	4
0	0	2	1	0	1	3

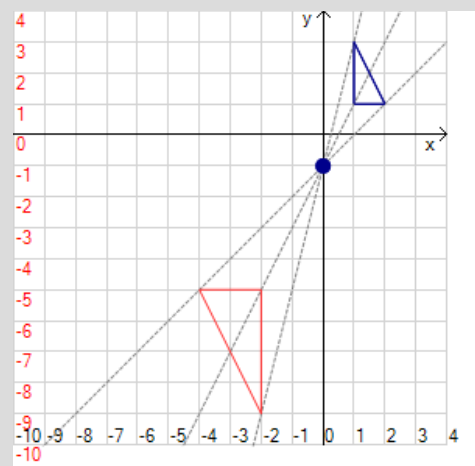
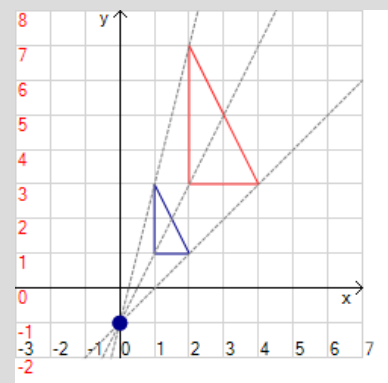
OK

Soluzione

x1=	2
x2=	0
x3=	0
x4=	2
x5=	0
x6=	1

rango(A) = 6  
 rango (A|b) = 6  
 Dim. ker(A) = 0  
 Parametri liberi = 0

Il sistema ha un'unica soluzione



## Esempio 12 (isometrie)

### Premessa

Una trasformazione  $t$  del piano è un'**isometria** se per ogni coppia di punti  $P$  e  $Q$  si ha

$$distanza(t(P), t(Q)) = distanza(P, Q)$$

In altre parole, un'**isometria** è una trasformazione che **conserva le distanze**.

Un'**isometria** è una trasformazione biettiva e trasforma rette in rette, quindi è un **particolare** tipo di affinità (non degenera) ed è anche un **particolare** tipo di similitudine.

La matrice  $A$  che caratterizza un'**isometria**  $t: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v$  è una matrice **ortogonale** cioè una matrice le cui colonne sono vettori ortogonali e di modulo 1. Tali matrici sono di due tipi:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

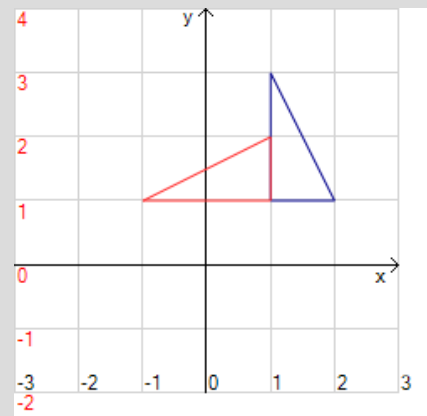
oppure

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

con  $a^2 + b^2 = 1$ . Nel primo caso l'**isometria** conserva l'orientamento della figura, nel secondo lo inverte.

### Esperimento

Considera i due triangoli rettangoli in figura: sono evidentemente congruenti (puoi passare dall'uno all'altro con un movimento rigido cioè con un'**isometria**). Determina l'affinità  $t$  che porta il triangolo blu sul triangolo rosso; potrai verificare che la matrice  $A$  di tale affinità è del tipo che caratterizza un'**isometria**.



Punti corrispondenti:

$$P(1, 1), Q(1, 3), R(2, 1)$$

$$P'(1, 1), Q'(-1, 1), R'(1, 2)$$

Consideriamo una generica affinità con  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  e  $v = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ ; dobbiamo risolvere il sistema lineare di 6 equazioni in 6 incognite seguente:

$$a + b + e = 1$$

$$c + d + f = 1$$

$$a + 3b + e = -1$$

$$\begin{aligned} c+3d+f &= 1 \\ 2a+b+e &= 1 \\ 2c+d+f &= 2 \end{aligned}$$

(vedi figura a fianco). Quindi l'affinità  $t$  è

$$t: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ed è del tipo che ci aspettavamo (isometria di primo tipo, si conserva l'orientamento).  
 Notare che  $a^2+b^2=1$ : un'isometria è una similitudine con rapporto di similitudine uguale a 1.

Sistema lineare (n equazioni, n incognite)

Sistema lineare, n equazioni, n incognite  
 $Ax = b$  n= 6

A = matrice n x n incompleta (matrice dei coeff.)  
 x = vettore incognite, b = vettore termini noti  
 (A|b) = matrice n x (n+1) completa

Matrice completa (in azzurro la colonna dei termini noti)

1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1
1	3	0	0	1	0	-1
0	0	1	3	0	1	1
2	1	0	0	1	0	1
0	0	2	1	0	1	2

OK

Soluzione

x1=	0
x2=	-1
x3=	1
x4=	0
x5=	2
x6=	0

rango(A) = 6  
 rango (A|b) = 6  
 Dim. ker(A) = 0  
 Parametri liberi = 0

Il sistema ha un'unica soluzione

### Esempio 13 (rotazioni)

#### Premessa

Le isometrie  $t: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v$  con A matrice ortogonale del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{con } a^2 + b^2 = 1$$

conservano l'orientamento ( $\det(A)=1$ ) e sono **rotazioni** (primo tipo di isometrie esaminate nell'esempio precedente). La condizione  $a^2+b^2 = 1$  implica che la coppia (a, b) appartiene alla circonferenza unitaria con centro nell'origine, quindi la matrice A può essere riscritta in questo modo

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

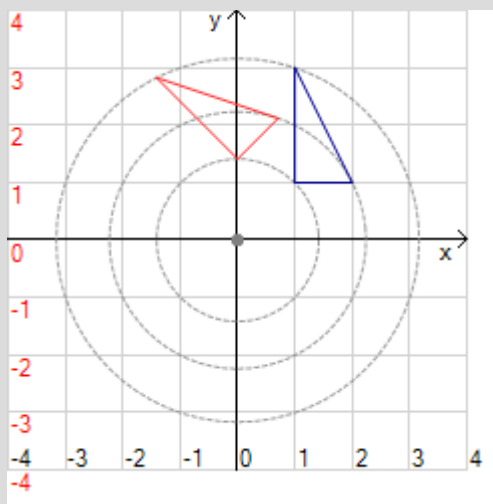
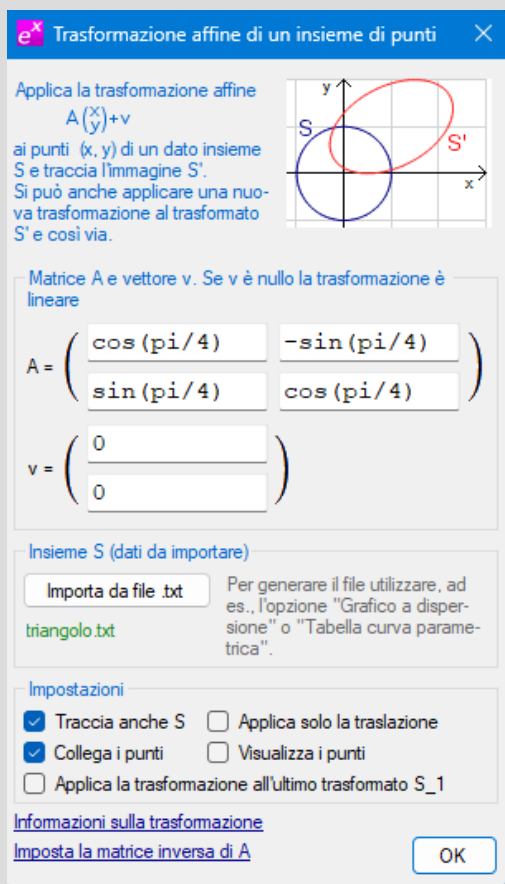
e determina una rotazione di  $\theta$  radianti; tale rotazione è rispetto all'origine se il vettore  $v$  è nullo.

#### Esperimento

Considera il triangolo rettangolo di vertici P(1, 1), Q(1, 3), R(2, 1):

- (1) opera una rotazione di  $\pi/4$  con centro nell'origine;
- (2) opera una rotazione di  $\pi/4$  con centro nel punto (2, 1).

Nel primo caso il vettore  $v$  è nullo. Le figure seguenti mostrano come eseguire la rotazione (sono anche state tracciate le tre circonferenze con centro nell'origine e passanti per ciascun vertice dei triangoli).



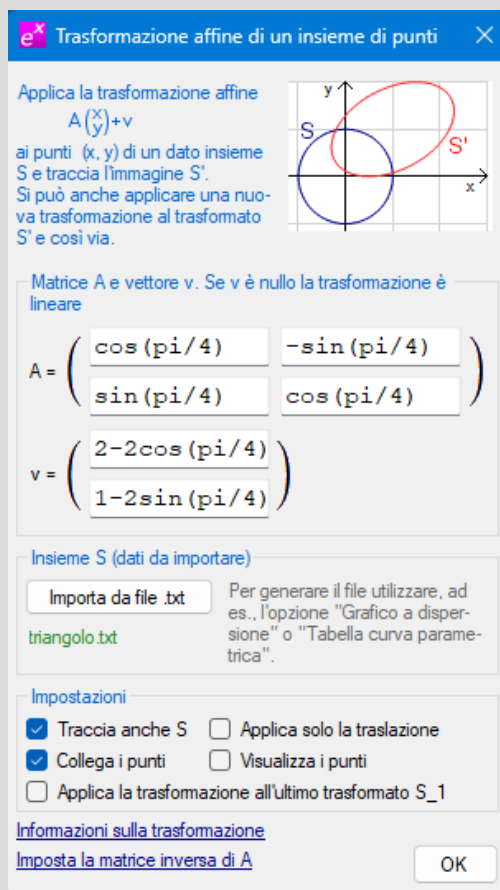
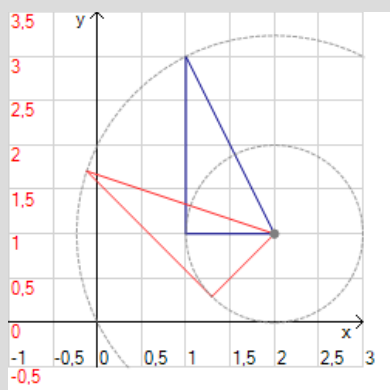
Nel secondo caso per determinare il vettore  $v=(e, f)$  terremo conto che l'isometria ha il centro di rotazione  $(2, 1)$  come unico **punto fisso**, quindi

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo

$$e = 2 - (2\cos(\pi/4) - \sin(\pi/4))$$

$$f = 1 - (2\sin(\pi/4) + \cos(\pi/4))$$



## Esempio 14 (simmetrie)

### Premessa

Le isometrie  $t: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v$  con A matrice ortogonale del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{con } a^2 + b^2 = 1$$

invertono l'orientamento perché  $\det(A) = -1 < 0$  (secondo tipo di isometrie esaminate nell'esempio 12). La condizione  $a^2 + b^2 = 1$  implica che la coppia (a, b) appartiene alla circonferenza unitaria con centro nell'origine, quindi la matrice A può essere riscritta in questo modo

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Tali isometrie determinano una simmetria rispetto ad una retta per l'origine che forma un angolo di  $\theta/2$  radianti rispetto all'asse delle x seguita da una traslazione di vettore v.

### Esperimento

Considera il triangolo rettangolo di vertici P(1, 1), Q(1, 3), R(2, 1):

- (1) opera una simmetria rispetto alla retta  $y=x$ ;
- (2) opera una simmetria rispetto alla retta  $y=-x/2+1$ .

Nel primo caso l'asse di simmetria passa per l'origine e quindi il vettore v è nullo. Le figure seguenti mostrano come eseguire la simmetria (è anche stato tracciato l'asse di ribaltamento  $y=x$  che forma un angolo di  $\pi/4$  rispetto all'asse delle x, quindi  $\theta = \pi/2$ ).



**Trasformazione affine di un insieme di punti**

Applica la trasformazione affine  $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v$  ai punti (x, y) di un dato insieme S e traccia l'immagine S'. Si può anche applicare una nuova trasformazione al trasformato S' e così via.

Matrice A e vettore v. Se v è nullo la trasformazione è lineare

$A = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & \sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & -\cos(\pi/2) \end{pmatrix}$   
 $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Insieme S (dati da importare)

Per generare il file utilizzare, ad es., l'opzione "Grafico a dispersione" o "Tabella curva parametrica".  
 triangolo.txt

Impostazioni

Traccia anche S    Applica solo la traslazione  
 Collega i punti    Visualizza i punti  
 Applica la trasformazione all'ultimo trasformato S\_1

[Informazioni sulla trasformazione](#)  
[Imposta la matrice inversa di A](#)

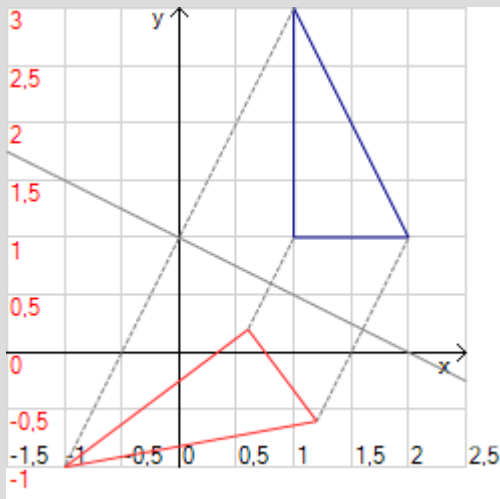
Nel secondo caso l'asse di simmetria non passa per l'origine. Per determinare l'angolo  $\theta$  terremo presente che l'asse  $y=-x/2+1$  forma un angolo di  $\text{atan}(-1/2)$  rispetto all'asse delle  $x$  (quindi  $\theta=2\text{atan}(-1/2)$ ); per determinare il vettore  $v=(e, f)$  terremo presente che l'asse di ribaltamento  $y=-x/2+1$  è un **asse di punti uniti**, quindi, ad esempio, il punto  $(0, 1)$  che appartiene all'asse deve essere trasformato in se stesso, quindi

$$\begin{pmatrix} \cos(2 \operatorname{atan}(-1/2)) & \sin(2 \operatorname{atan}(-1/2)) \\ \sin(2 \operatorname{atan}(-1/2)) & -\cos(2 \operatorname{atan}(-1/2)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo

$$e = 0 - \sin(2 \operatorname{atan}(-1/2))$$

$$f = 1 + \cos(2 \operatorname{atan}(-1/2))$$



**e<sup>x</sup> Trasformazione affine di un insieme di punti** ✕

Applica la trasformazione affine  $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v$  ai punti  $(x, y)$  di un dato insieme  $S$  e traccia l'immagine  $S'$ . Si può anche applicare una nuova trasformazione al trasformato  $S'$  e così via.

Matrice  $A$  e vettore  $v$ . Se  $v$  è nullo la trasformazione è lineare

$A = \begin{pmatrix} \cos(2 \operatorname{atan}(-1/2)) & \sin(2 \operatorname{atan}(-1/2)) \\ \sin(2 \operatorname{atan}(-1/2)) & -\cos(2 \operatorname{atan}(-1/2)) \end{pmatrix}$

$v = \begin{pmatrix} -\sin(2 \operatorname{atan}(-1/2)) \\ 1 + \cos(2 \operatorname{atan}(-1/2)) \end{pmatrix}$

Insieme  $S$  (dati da importare)

Per generare il file utilizzare, ad es., l'opzione "Grafico a dispersione" o "Tabella curva parametrica".

triangolo.txt

Impostazioni

Traccia anche  $S$     Applica solo la traslazione

Collega i punti    Visualizza i punti

Applica la trasformazione all'ultimo trasformato  $S_1$

[Informazioni sulla trasformazione](#)

[Imposta la matrice inversa di  \$A\$](#)

## Esempio 15 (rette unite, autovettori, autovalori, caratterizzazione spettrale)

### Premessa

Data un'affinità  $Au+v$  con  $u=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , la parte lineare  $A$  determina la **natura geometrica** della trasformazione, mentre  $v$  determina la traslazione. In particolare lo **spettro** di  $A$ , cioè l'insieme degli autovalori di  $A$ , ci fornisce informazioni sulle caratteristiche geometriche della trasformazione. Gli esempi seguenti si riferiscono tutti a trasformazioni **lineari** cioè al caso in cui  $v=0$  (vettore nullo). Per determinare lo spettro di  $A$  utilizzeremo l'opzione *Calcolo - Autovalori, autovettori, auto-spazi matrice 2x2*. Ricordiamo che  $u$  è un punto fisso dell'affinità diverso dall'origine se e solo se  $u$  è un autovettore di autovalore  $\lambda=1$  ( $Au=1u$ ).

### Omotetie

Consideriamo l'affinità

$$t: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

sappiamo che si tratta di un'omotetia con centro nell'origine e rapporto di omotetia  $k=2$  (vedi esempio 11). Calcoliamo autovalori e autovettori della matrice  $A$  (figura seguente).

**e<sup>x</sup> Autovalori, autovettori, auto-spazi di una matrice 2x2** ✕

Autovalori, autovettori, auto-spazi di una matrice 2x2 (gli auto-spazi vengono tracciati)

In figura ad es., in rosso, gli auto-spazi relativi alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

In grigio, il campo vettoriale relativo all'applicazione lineare associata alla matrice.

Matrice 2x2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Traccia il campo vettoriale Guida OK

Tipo di stabilità

Autovalori

$\lambda_1=$  2

$\lambda_2=$  2

Autovettori

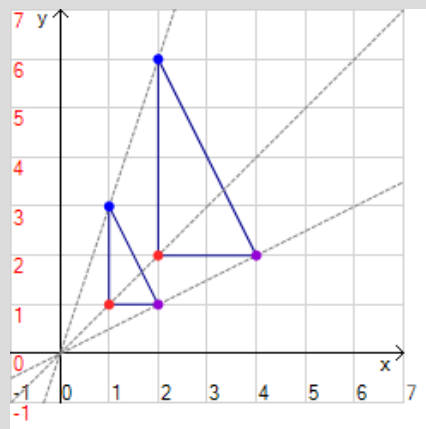
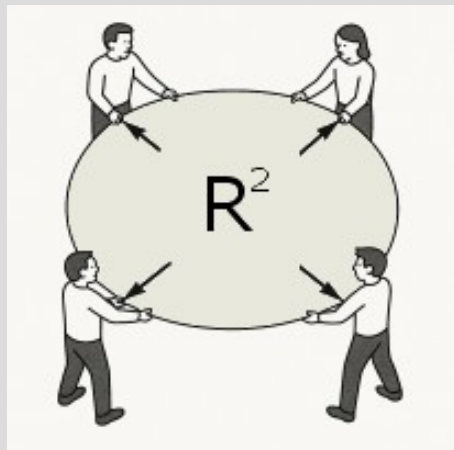
$v_1=$  (1; 0)

$v_2=$  (0; 1)

Autovettori:  $av_1+bv_2$  con  $a$  e  $b$  non entrambi nulli (dimensione autospazio = 2)

La matrice  $A$  ha due autovalori coincidenti  $\lambda_1=\lambda_2=2=k$ . La dimensione dell'autospazio dell'autovalore 2 è 2 quindi l'autospazio è tutto  $\mathbb{R}^2$ , tutti i vettori non nulli sono autovettori, tutte le rette per l'origine sono **unite** (una retta  $r$  si dice *unita* se ogni suo punto  $P$  è trasformato in un punto  $P'$  che appartiene ancora ad  $r$ , potendo  $P'$  anche coincidere  $P$ ).

La figura a fianco mostra l'effetto della trasformazione sul solito triangolo; punti corrispondenti hanno lo stesso colore e si trovano sulla stessa retta per l'origine. Tutto il piano viene dilatato di un fattore 2 **in modo uniforme** in ogni direzione.



CARATTERIZZAZIONE SPETTRALE DI UN'OMOTETIA:

1. un unico autovalore  $\lambda$  (molteplicità algebrica di  $\lambda$  uguale a 2)
2. dimensione dell'autospazio di  $\lambda$  uguale a 2 (molteplicità geometrica di  $\lambda$  uguale a 2).

Simmetrie assiali

Consideriamo l'affinità

$$t: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & \sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & -\cos(\pi/3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

sappiamo che si tratta di una simmetria rispetto alla retta per l'origine che forma un angolo di  $\pi/6$  rispetto all'asse delle  $x$  (vedi esempio 14). Calcoliamo autovalori e autovettori della matrice  $A$  (figura a fianco).

La matrice  $A$  ha due autovalori distinti  $\lambda_1=-1$  e  $\lambda_2=1$ . I due autospazi sono rette per l'origine, la loro dimensione è 1 (vedi la finestra della figura a fianco, dando l'ok saranno tracciati i due autospazi).

Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2

Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2 (gli autospazi vengono tracciati)

In figura ad es., in rosso, gli autospazi relativi alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

In grigio, il campo vettoriale relativo all'applicazione lineare associata alla matrice.

Matrice 2x2

$\cos(\pi/3)$	$\sin(\pi/3)$
$\sin(\pi/3)$	$-\cos(\pi/3)$

[Traccia il campo vettoriale](#)   [Guida](#)   OK

Autovalori

$\lambda_1=$

$\lambda_2=$

Autovettori

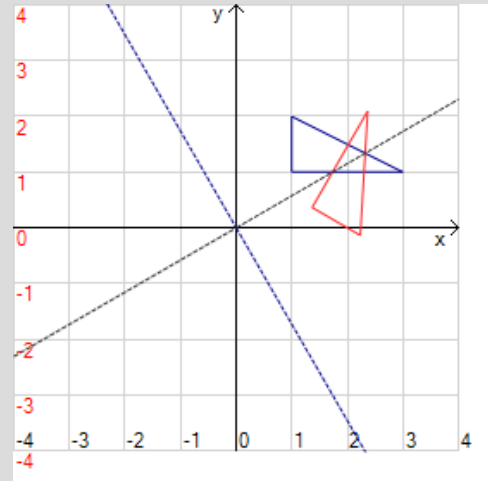
$v_1=$

$v_2=$

Autovettori di  $\lambda_1$ :  $kv_1$  con  $k \neq 0$ . Autovettori di  $\lambda_2$ :  $kv_2$  con  $k \neq 0$ . (Possibile coincidenza)

L'autospazio dell'autovalore 1 è l'asse di ribaltamento ed è un **asse di punti uniti** ( $Au = \lambda_1 u = u$ ), l'autospazio di -1 è la retta per l'origine ortogonale al primo autospazio, è una **retta unita** (i suoi punti sono ribaltati rispetto all'origine,  $Au = \lambda_2 u = -u$ ).

La figura a fianco mostra la trasformazione applicata al solito triangolo blu. Le due rette tratteggiate sono gli autospazi (tracciati da EffeDiX). L'autospazio dell'autovalore 1 è la retta generata dall'autovettore (1,73205081; 1) ed è l'asse di ribaltamento.



CARATTERIZZAZIONE SPETTRALE DI UNA SIMMETRIA:  
due autovalori  $\lambda_1=1$ ,  $\lambda_2=-1$ . L'asse di simmetria è generato dall'autovettore relativo a  $\lambda_1$ .

## Rotazioni

Consideriamo l'affinità

$$t: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

sappiamo che si tratta di una rotazione di  $\pi/4$  con centro nell'origine (vedi esempio 13). Calcoliamo autovalori e autovettori della matrice A (figura a fianco).

La matrice A ha due autovalori complessi coniugati, inoltre

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$$

Non ci sono autovettori reali. Tenendo presente che

$$\begin{aligned} \cos(\pi/4) &= \sin(\pi/4) \approx 0,70710678 \\ \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \quad \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \end{aligned}$$

e scrivendo gli autovalori in forma trigonometrica si ha

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4) \\ \lambda_2 &= \cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4) \end{aligned}$$

Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2 (gli autospazi vengono tracciati)

In figura ad es., in rosso, gli autospazi relativi alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

In grigio, il campo vettoriale relativo all'applicazione lineare associata alla matrice.

Matrice 2x2

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}$$

Traccia il campo vettoriale [Guida](#)

Tipo di stabilità

Autovalori

$\lambda_1 = 0,70710678 - 0,70710678i$

$\lambda_2 = 0,70710678 + 0,70710678i$

$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$

Autovettori

$v_1 = (0-1i; 1)$

$v_2 = (0+1i; 1)$

Autovettori di  $\lambda_1$ :  $kv_1$  con  $k \neq 0$ . Autovettori di  $\lambda_2$ :  $kv_2$  con  $k \neq 0$ .

CARATTERIZZAZIONE SPETTRALE DI UNA ROTAZIONE:

1. due autovalori complessi coniugati  $e^{\pm i\theta}$
2. modulo autovalori uguale a 1

L'angolo di rotazione  $\theta$  è determinato a meno del segno dall'argomento degli autovalori.

Similitudini

Primo caso. Consideriamo l'affinità

$$t: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

sappiamo che si tratta di una similitudine diretta con rapporto di similitudine

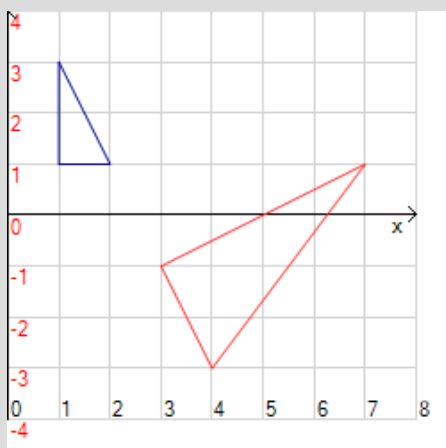
$$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{5} \approx 2,23606798$$

(vedi esempio 10). Calcoliamo autovalori e autovettori della matrice A (figura a fianco).

La matrice A ha due autovalori complessi coniugati, inoltre il comune modulo degli autovalori è uguale al rapporto di similitudine

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| \approx 2,23606798$$

Non ci sono autovettori reali; la trasformazione non ha rette unite, l'unico punto fisso è l'origine. Nella figura seguente l'effetto della similitudine sul solito triangolo (rotazione + dilatazione).



Secondo caso. Consideriamo l'affinità

$$t: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2

Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2 (gli autospazi vengono tracciati)

In figura ad es., in rosso, gli autospazi relativi alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

In grigio, il campo vettoriale relativo all'applicazione lineare associata alla matrice.

Matrice 2x2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Traccia il campo vettoriale Guida OK

Tipo di stabilità

Autovalori

$\lambda_1 = 1 - 2i$

$\lambda_2 = 1 + 2i$

$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 2,23606798$

Autovettori

$v_1 = (0 + 1i; 1)$

$v_2 = (0 - 1i; 1)$

Autovettori di  $\lambda_1$ :  $kv_1$  con  $k \neq 0$ . Autovettori di  $\lambda_2$ :  $kv_2$  con  $k \neq 0$ .

sappiamo che si tratta di una similitudine che inverte l'orientamento, il rapporto di similitudine è

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}\approx 2,23606798$$

(vedi esempio 10). Calcoliamo autovalori e autovettori della matrice A (figura a fianco).

La matrice A ha due autovalori reali opposti, inoltre il comune modulo degli autovalori è uguale al rapporto di similitudine

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| \approx 2,23606798$$

I due autospazi relativi ai due autovalori hanno dimensione 1 e sono due rette unite ma l'unico punto unito è l'origine.

Nella figura seguente l'effetto della similitudine sul solito triangolo (simmetria + dilatazione). Due cose da notare:

1. vertici corrispondenti sono stati tracciati con lo stesso colore; per farlo aprite le finestre relative al triangolo iniziale S\_0 e al suo trasformato S\_1 e fate clic sulla riga relativa al punto; nel primo triangolo i vertici hanno orientamento orario (nero, rosso, giallo in senso orario), nel trasformato hanno orientamento inverso (nero, rosso, giallo in senso antiorario);

2. sono tratteggiate in grigio le due rette che costituiscono gli autospazi e sono stati evidenziati in blu e in rosso due segmenti corrispondenti appartenenti ai due triangoli e ad una retta unita (autospazio); come si vede il segmento blu subisce una dilatazione nella direzione dell'autovettore  $v_2=(1,618; 1)$  ma rimane sulla retta unita (si tratta di una dilatazione perché il relativo autovalore ha modulo maggiore di 1).

**Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2**

Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2 (gli autospazi vengono tracciati)

In figura ad es., in rosso, gli autospazi relativi alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

In grigio, il campo vettoriale relativo all'applicazione lineare associata alla matrice.

Matrice 2x2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

[Traccia il campo vettoriale](#) [Guida](#) OK

Tipo di stabilità

**Autovalori**

$\lambda_1 = -2,23606798$

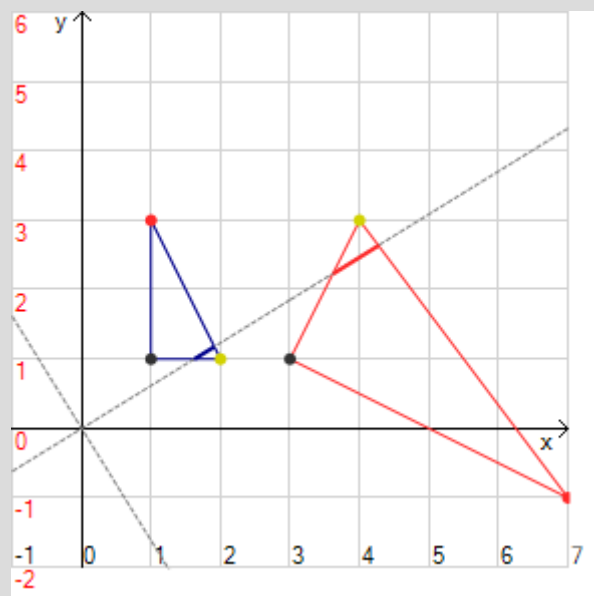
$\lambda_2 = 2,23606798$

**Autovettori**

$v_1 = (-0,61803399; 1)$

$v_2 = (1,61803399; 1)$

Autovettori di  $\lambda_1$ :  $kv_1$  con  $k \neq 0$ . Autovettori di  $\lambda_2$ :  $kv_2$  con  $k \neq 0$ . (Possibile coincidenza)



#### CARATTERIZZAZIONE SPETTRALE DI UNA SIMILITUDINE:

$$|\lambda_1| = |\lambda_2|$$

Se gli autovalori sono complessi coniugati la similitudine conserva l'orientamento (rotazione + dilatazione); se sono reali opposti la similitudine inverte l'orientamento (simmetria assiale + dilatazione); se sono reali coincidenti la similitudine è un'omotetia con centro nell'origine.