Discretizzazione di un'equazione differenziale. Il metodo di Eulero

Un'equazione differenziale rappresenta un **modello continuo** di un qualche fenomeno che, di solito, varia rispetto al tempo; tale equazione coinvolge una funzione incognita $x(t)$ e alcune sue derivate dove la variabile t, il tempo, **varia con continuità**. Nella maggior parte dei casi non siamo in grado di determinare la soluzione di un'equazione differenziale, pur sapendo per via teorica che tale soluzione esiste, cioè non siamo in grado di esprimere la funzione incognita $x(t)$ mediante una formulazione analitica esplicita.

Un **modello discreto**, ad esempio una mappa iterativa, rappresenta comunque un fenomeno che varia nel tempo, la variazione del tempo è però per **passi discreti**.

Il processo di discretizzazione di un modello continuo consiste nell'**approssimare** la soluzione di un'equazione differenziale mediante un processo iterativo, in cui il tempo varia per passi discreti. Tale processo iterativo è implementabile in algoritmi numerici gestibili da un computer e consente **sempre** di approssimare la soluzione quando tale soluzione esiste ed è unica.

Vediamo come procedere. Consideriamo ad esempio l'equazione differenziale autonoma, del primo ordine

$$x'(t) = g(x(t))$$

con la condizione iniziale $t_0=0$, $x(t_0)=x_0$. Consideriamo un insieme discreto di valori equidistanti

$$t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots$$

per la variabile indipendente e sia $h = t_{i+1} - t_i$ il passo discreto. In ciascun intervallo $[t_i, t_{i+1}]$ possiamo approssimare

$x(t)$ con $x(t_i)$

e

$x'(t)$ con $(x(t_{i+1})-x(t_i))/h$

(più piccolo è h, migliore l'approssimazione).

Sostituendo nella nostra equazione differenziale si ha

$$(x(t_{i+1})-x(t_i))/h = g(x(t_i)) \quad \text{con} \quad x(t_0)=x_0$$

da cui deriva la mappa iterativa

$$x(t_{i+1}) = h\, g(x(t_i)) + x(t_i) \quad \text{con} \quad x(t_0)=x_0$$

Notare che la funzione iterata è $f(x) = h\, g(x) + x$ con $x_0 = x(t_0)$.

Potremo quindi ottenere per iterazione un insieme di punti (t_i, x_i) che approssimano punti della soluzione dell'equazione differenziale:

t_0, $x_0 = x(t_0)$ condizione iniziale data
$t_1 = t_0 + h$, $x_1 = x(t_1) = h\, g(x_0) + x_0$
$t_2 = t_1 + h$, $x_2 = x(t_2) = h\, g(x_1) + x_1$
…

Questo procedimento (algoritmo di Eulero) ha valore sopratutto didattico perché chiarisce in cosa consista il processo di discretizzazione ma dimostra una scarsa efficienza numerica (poca accuratezza anche con passo piccolo).

Per tutte le opzioni che coinvolgono equazioni differenziali, EffeDiX utilizza l'algoritmo RK4 (Runge-Kutta di ordine 4) che fornisce approssimazioni delle soluzioni estremamente accurate; nell'esempio seguente tuttavia, a titolo di ulteriore chiarimento, applicheremo il metodo di Eulero per risolvere un'equazione differenziale e utilizzeremo l'opzione *Oggetti grafici – Orbita discreta 1D*.

Esempio

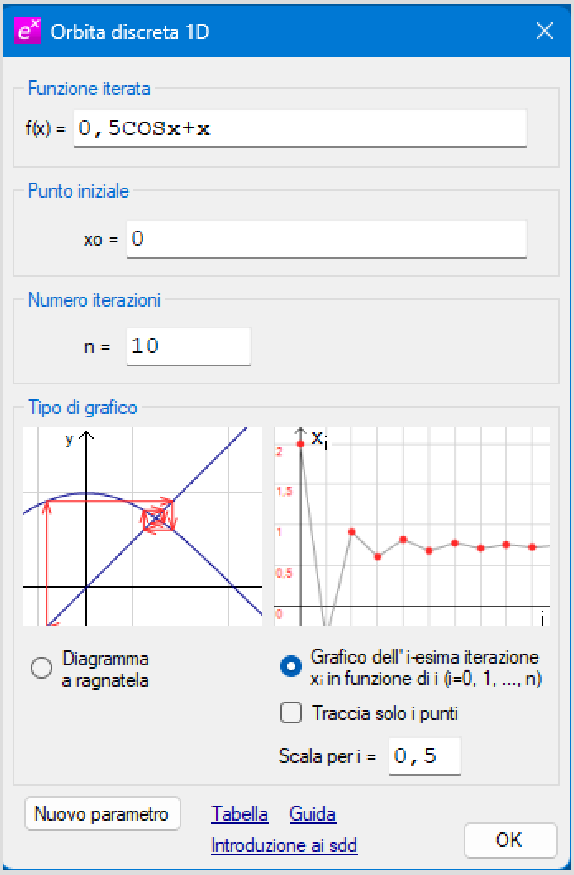
Approssimare la soluzione del problema di Cauchy

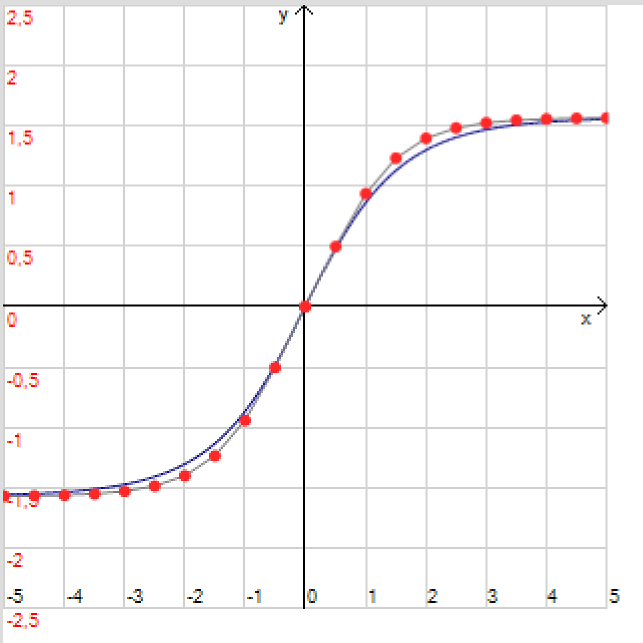
$$x'(t) = \cos(x(t)), \quad x(t_0)=x_0$$

mediante l'algoritmo di Eulero.

La funzione $f(x)$ da iterare è $f(x) = h \cos x + x$.

La prima delle figure seguenti mostra la finestra di impostazione: il passo impostato è $h=0,5$ e le iterazioni sono 10, in tal modo i varia tra 0 e 5 con passo 0,5. Notare che la scala per i, che di solito è 1, deve essere uguale al passo h. Per ottenere l'altra serie di punti con i che varia da 0 a -5 con passo -0,5, la funzione da iterare sarà $-0,5 \times \cos x + x$ e la scala per i sarà -0,5. La seconda figura mostra in rosso i punti determinati con l'algoritmo di Eulero e in blu il grafico della soluzione analitica $x(t) = \operatorname{asin}(\tanh(x))$.





Nelle figure seguenti due tabelle: quella a sinistra mostra le coordinate di alcuni punti della soluzione analitica, quella a destra le coordinate dei punti corrispondenti calcolate mediante l'algoritmo di Eulero con passo 0,5. Naturalmente riducendo il passo migliorerebbe l'accuratezza.