Divergenza

Se *V(x, y)=(f(x, y), g(x, y))* è un campo vettoriale 2D, la *divergenza* di V è così definita:

$$\operatorname{div}(V) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

EffeDiX può:

(1) determinare l'**approssimazione numerica** della divergenza di V in un dato punto (x_0, y_0);

(2) tracciare i punti (x, y) di una data regione rettangolare R del piano tali che la divergenza di V in tali punti sia positiva;

(3) tracciare i punti (x, y) di una data regione rettangolare R del piano tali che la divergenza di V in tali punti sia negativa;

(4) tracciare i punti (x, y) di una data regione rettangolare R del piano tali che la divergenza di V appartenga ad un dato intervallo (a, b).

L'opzione da utilizzare è *Calcolo – Divergenza di un campo vettoriale*.

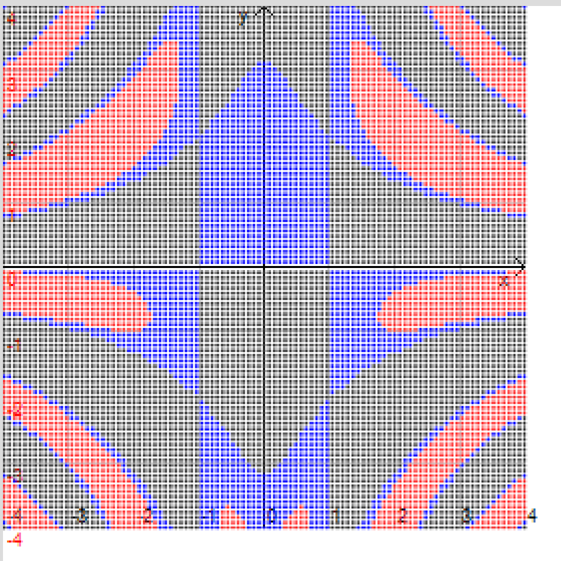
Esempio 1

Sia V il campo vettoriale *(x siny, cos(xy))*. Evidenziare i punti (x, y) della regione R del piano con -4 < x < 4, -4 < y < 4 tali che:

(1) la divergenza sia negativa;
(2) la divergenza sia compresa tra 0 e 1;
(3) la divergenza sia compresa tra 1 e 5.

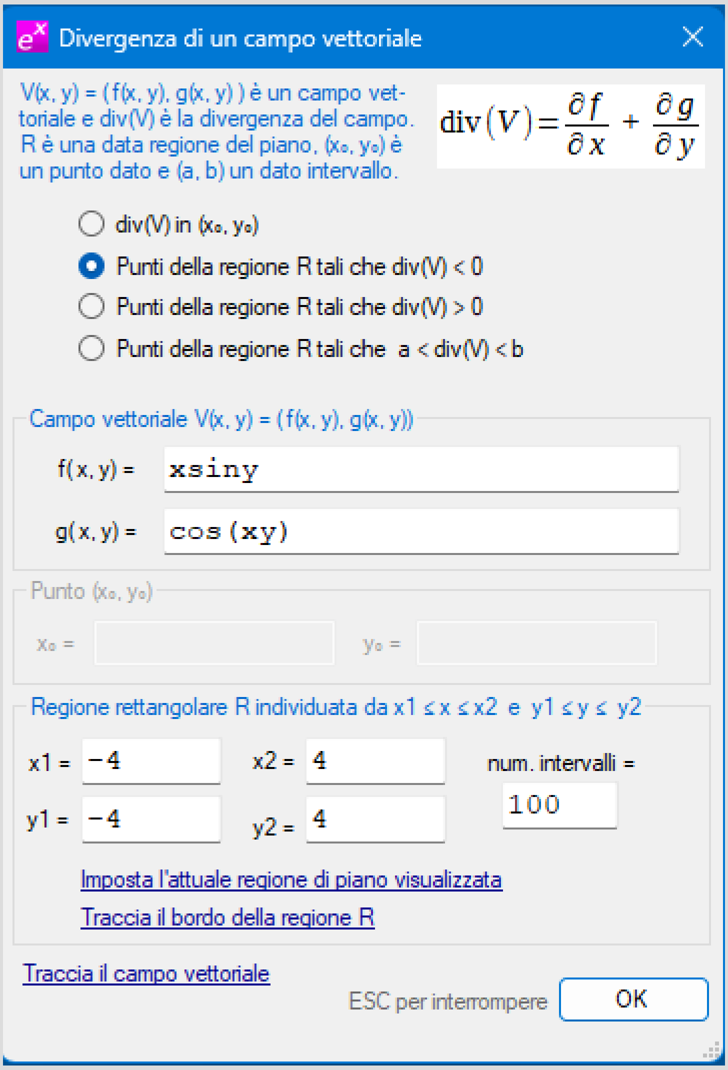
Calcolare inoltre la divergenza nel punto (-3,1; -2,15).

La figura seguente mostra i tre sottoinsiemi della regione R.



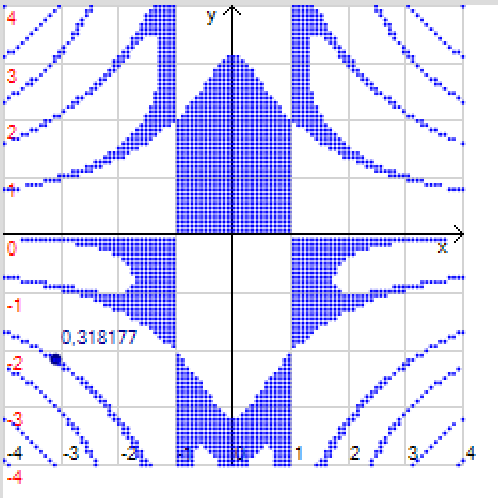
In nero sono evidenziati i punti con divergenza negativa, in blu i punti con divergenza compresa tra 0 e 1, in rosso i punti con divergenza compresa tra 1 e 5. I punti con divergenza nulla sono i punti di frontiera tra la regione nera e quella blu. Notare che ciascuna regione è un insieme topologicamente disconnesso (cioè composto da parti separate).

La figura seguente mostra la finestra d'impostazione per evidenziare i punti con divergenza negativa; in modo analogo si procederà negli altri casi.

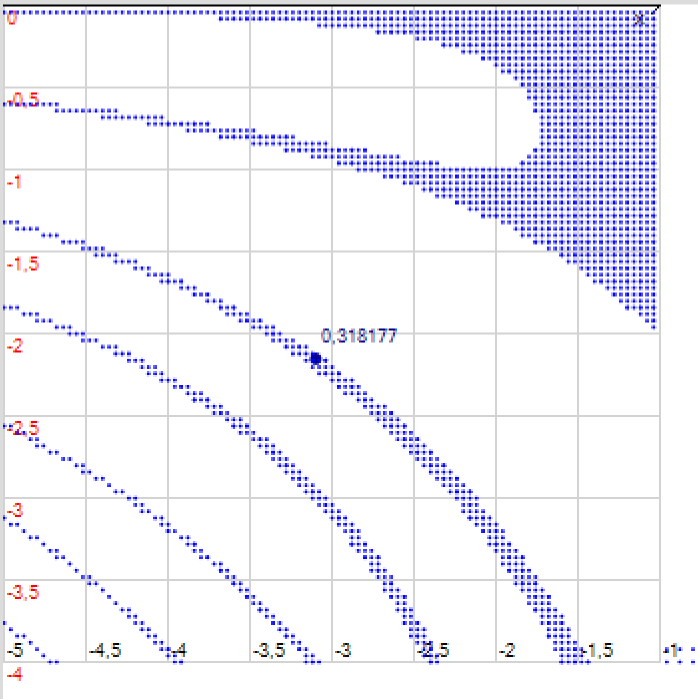


Per studiare con più accuratezza le zone di frontiera tra regioni contigue conviene zoomare e rigenerare i punti dopo aver reimpostato la regione R di ricerca facendo clic sul link “Imposta l’attuale regione di piano visualizzata”. L’accuratezza dipende anche, ovviamente, dal numero di intervalli impostati.

La figura seguente mostra il valore della divergenza nel punto (-3,1; -2,15) che si trova nella regione blu.

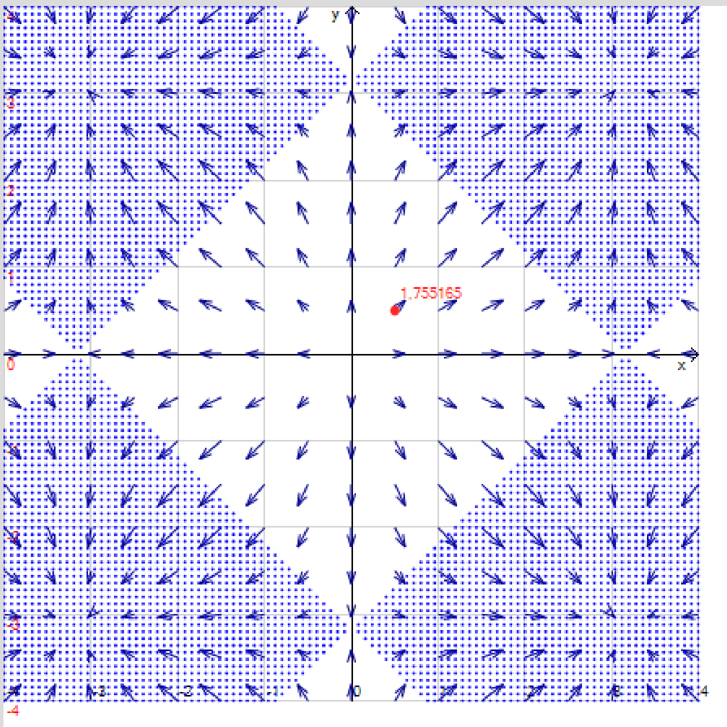


La figura seguente mostra una zoomata sulla regione che contiene il punto (per maggior accuratezza la regione è stata rigenerata dopo la zoomata, avendo reimpostato la regione R come si è già detto).



Esempio 2

Per avere un'idea intuitiva della divergenza si può pensare che il campo vettoriale V rappresenti il campo delle velocità di un fluido; ogni particella del fluido che si trova in un certo punto si muove secondo il relativo vettore del campo con origine nel punto (quindi si muove nella direzione e verso del vettore e con velocità scalare pari al modulo del vettore); naturalmente la particella che si muove con continuità nel campo interagisce con continuità con i vettori del campo che generalmente variano da punto a punto. Ora consideriamo un piccolo intorno (tendenzialmente infinitesimo) di un punto P del piano, ad esempio un intorno circolare: la divergenza in P quantifica la differenza tra il flusso di particelle del fluido che escono dall'intorno meno il flusso di quelle che entrano nell'unità di tempo e per unità di area (su quest'ultimo aspetto torneremo negli esempi). Se in P la divergenza è negativa significa che nell'intorno entra più fluido di quanto ne esca, il punto P è un "pozzo" che assorbe tutto o parte del fluido; al contrario la divergenza è positiva se esce più fluido di quanto ne entra, P è una "sorgente" di fluido; infine la

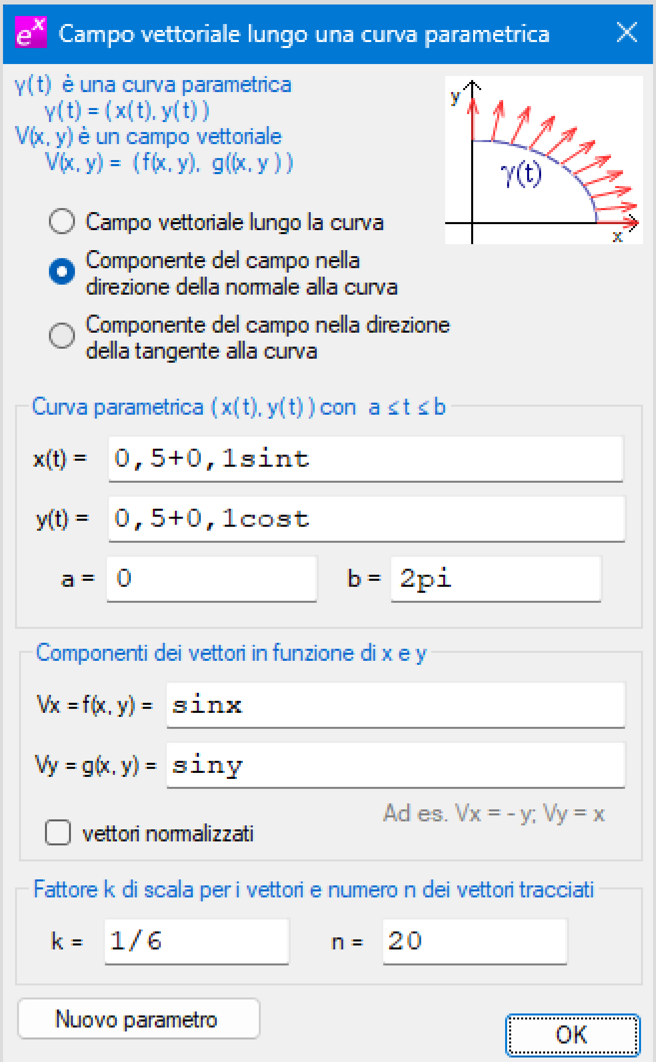


divergenza in P è nulla se nell'intorno entra tanto fluido quanto ne esce. Ragionando sui vettori del campo lungo il bordo circolare dell'intorno bisogna tener presente che per valutare il flusso entrante e uscente quello che conta è la componente **normale** dei vettori (cioè la componente dei vettori nella direzione della normale al bordo dell'intorno); ne segue che osservando semplicemente il campo vettoriale in un intorno del punto in molti casi l'idea che se ne ricava può essere fuorviante.

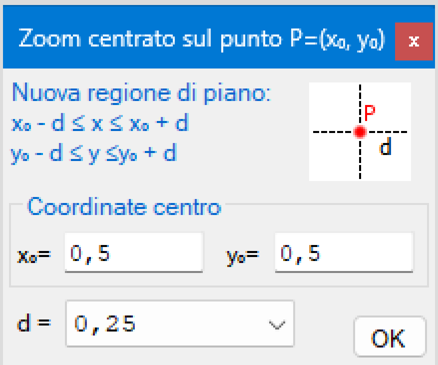
Consideriamo ora il caso concreto del campo vettoriale *V=(sinx, siny)* della figura precedente in cui sono evidenziati i punti con divergenza negativa; vogliamo rappresentare graficamente il fatto che la divergenza nel punto (0,5; 0,5) è positiva (il punto è una sorgente).

Useremo l'opzione *Oggetti grafici – Campo vettoriale – Campo vettoriale lungo una curva*, la figura seguente ne mostra la finestra d'impostazione.

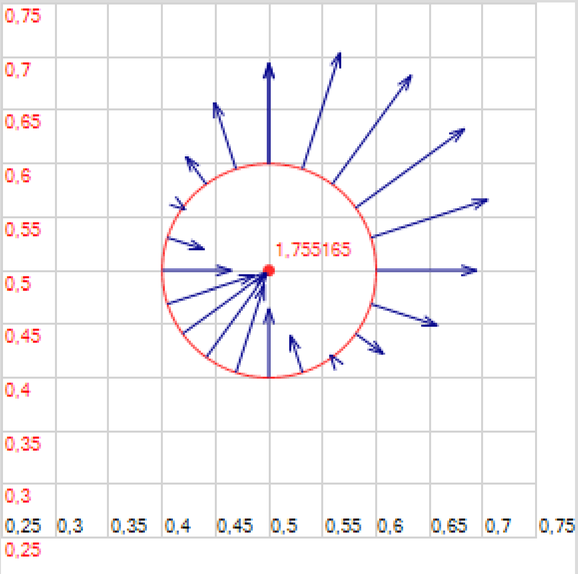
Notare che è stata selezionata la componente normale dei vettori del campo alla curva; la curva considerata che rappresenta il bordo dell'intorno è una circonferenza centrata in (0,5; 0,5) e di raggio 0,1; tutti i vettori hanno modulo ridotto in scala di fattore 1/6.

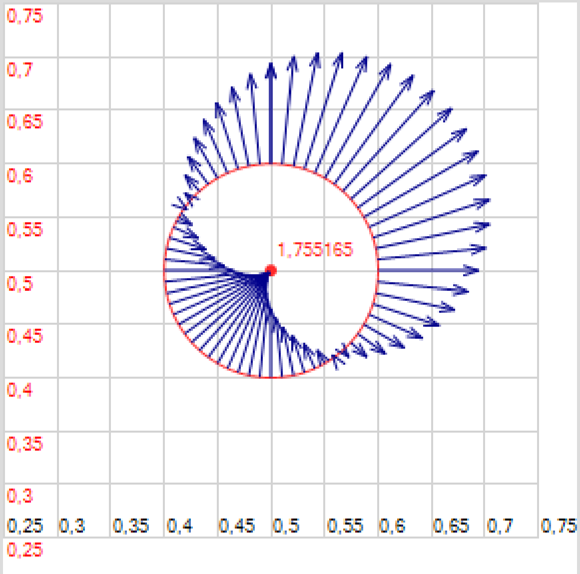


Per zoomare sull'intorno del punto utilizzare il pulsante per lo zoom centrato che si trova a destra del piano cartesiano (vedi figura seguente).



Le figure seguenti mostrano la rappresentazione grafica che si ottiene e mostrano con chiarezza che il punto è una sorgente; nella figura a sinistra sono tracciati 20 vettori normali alla curva, in quella a destra 60.





Pensando sempre al nostro campo vettoriale come al campo delle velocità di un fluido, tener presente che vettori più lunghi indicano una maggior velocità del fluido (quindi nel nostro caso esce più fluido di quanto ne entra perché esce a velocità maggiore di quando entra).

Esempio 3

Per il teorema di Gauss-Green si ha

$$\oint_{\gamma} \vec{V} \cdot \vec{n} \ \mathrm{ds} = \iint_{D} \mathrm{div}(\vec{V}) \ \mathrm{dx\ dy}$$

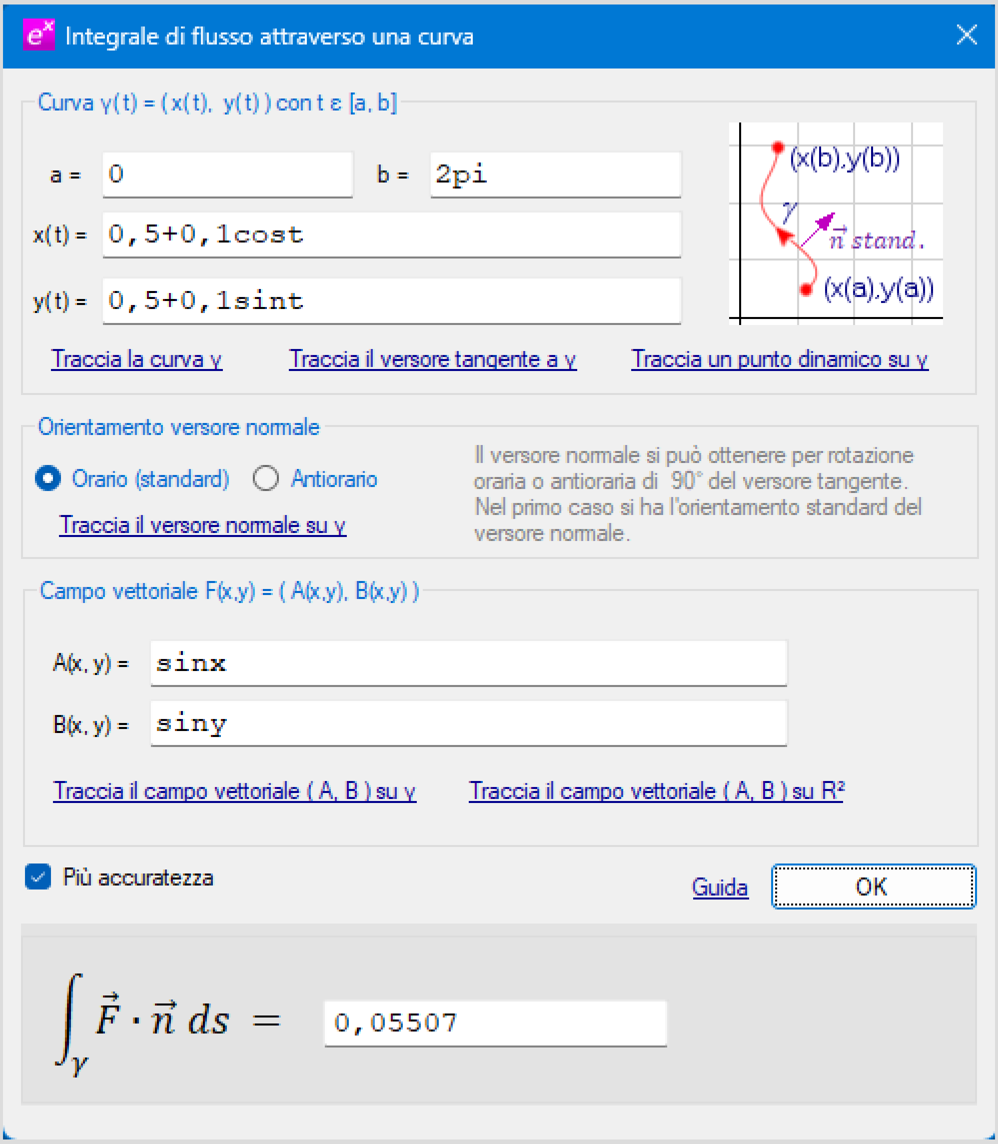
dove V è un campo vettoriale, γ è una curva chiusa percorsa in modo da lasciare a sinistra il suo interno e D è la regione di piano che ha γ per frontiera; dunque l'integrale di flusso di un campo vettoriale V attraverso una curva chiusa γ equivale all'integrale doppio della divergenza di V sul dominio D di cui γ costituisce la frontiera. Ora se consideriamo un punto (x_0, y_0) e un suo **piccolo** intorno circolare I di raggio r, possiamo assumere, per continuità, che la divergenza di V in I sia approssimativamente costante ed uguale alla divergenza in (x_0, y_0); quindi

$$\oint_{\partial I} \vec{V} \cdot \vec{n} \ \mathrm{ds} = \iint_{I} \mathrm{div}(\vec{V}) \ \mathrm{dx\ dy} \approx \mathrm{div}(V_{(x0,y0)})(\pi r^2)$$

da cui

$$\mathrm{div}(V_{(x0,y0)}) \approx \frac{\oint_{\partial I} \vec{V} \cdot \vec{n} \ \mathrm{ds}}{(\pi r^2)}$$

Verifichiamo quest'ultima importante approssimazione nel caso del campo V dell'esempio precedente, prendendo come intorno I l'intorno circolare di raggio 0,1 del punto (0,5; 0,5), punto in cui sappiamo che la divergenza è 1,755165. La figura seguente mostra la finestra d'impostazione per l'integrale di flusso.



Verifica: 0,05507 /(π 0,1^2) ≈ 1,75.

Nota: dall'approssimazione

$$\operatorname{div}(V_{(x0,y0)}) \approx \frac{\oint_{\partial I} \vec{V}\cdot\vec{n}\ \mathrm{ds}}{(\pi r^2)}$$

segue un'altra possibile definizione di divergenza che mette in luce la sua relazione con un integrale di flusso

$$\operatorname{div}(V_{(x0,y0)}) = \lim_{r\to 0} \frac{\oint_{\partial I(r)} \vec{V}\cdot\vec{n}\ \mathrm{ds}}{(\pi r^2)}$$

dove *I(r)* indica un intorno circolare di raggio *r* del punto (x_0, y_0).