

Gradiente, derivata direzionale, punti stazionari

Gradiente

Data una funzione $f(x, y)$ e un punto (x_0, y_0) , EffeDiX può tracciare il vettore gradiente della funzione nel punto dato

$$\nabla(f(x_0, y_0)) = \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right)$$

EffeDiX, inoltre, valuta e visualizza l'**approssimazione numerica** delle componenti e del modulo del gradiente. Sia l'espressione della funzione sia le coordinate del punto possono contenere parametri e ciò consente la realizzazione di animazioni.

L'opzione da utilizzare è *Calcolo – Gradiente*.

Derivata direzionale

Data una funzione differenziabile $f(x, y)$, un punto (x_0, y_0) e un vettore u , non necessariamente normalizzato, EffeDiX può visualizzare l'**approssimazione numerica** della derivata direzionale

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial u}$$

della funzione $f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0) secondo la direzione individuata dal vettore u . EffeDiX, inoltre, traccia il vettore direzione u (normalizzato).

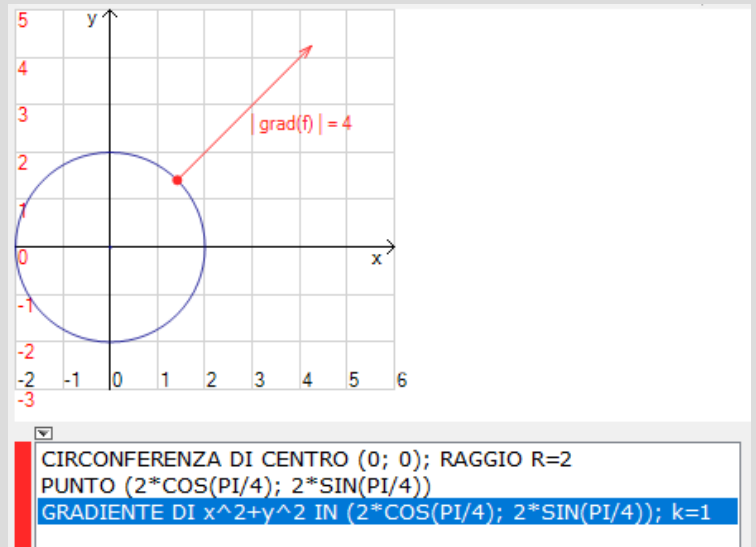
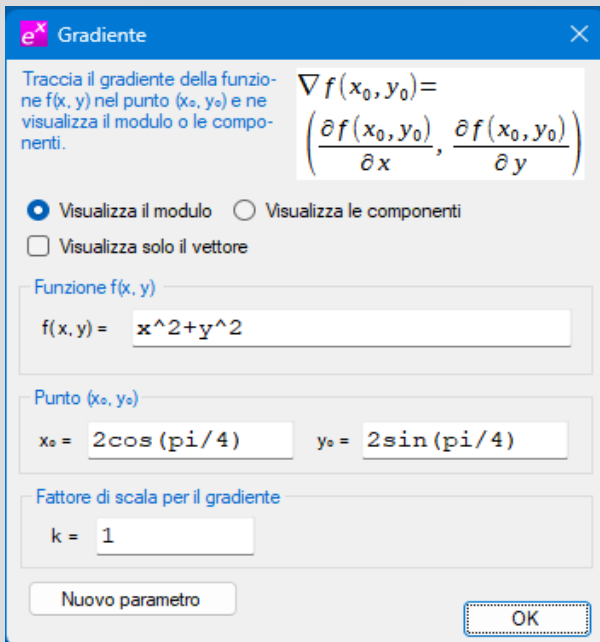
Sia l'espressione della funzione sia le coordinate del punto sia le componenti del vettore direzione u possono contenere parametri e ciò consente la realizzazione di animazioni.

Il prossimo esempio è fondamentale per capire il significato del gradiente.

Esempio 1

Traccia, a tua scelta, una curva di livello della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ il cui grafico è un paraboloide ellittico, traccia in un punto P qualsiasi della curva di livello il gradiente di $f(x, y)$ e visualizzane il modulo; traccia poi un versore direzione u , applicato in P, che possa ruotare di 360 gradi e verifica che la derivata direzionale secondo u in P è **massima** quando u ha la direzione del gradiente e che tale derivata è uguale al modulo del gradiente.

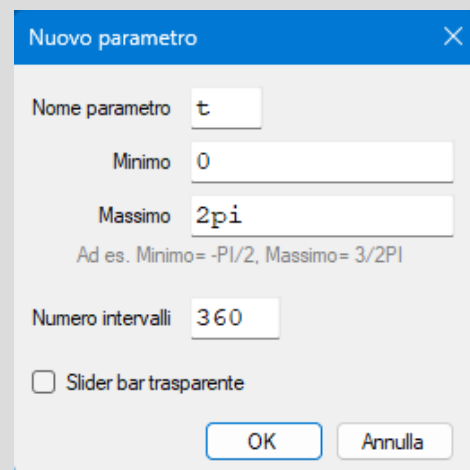
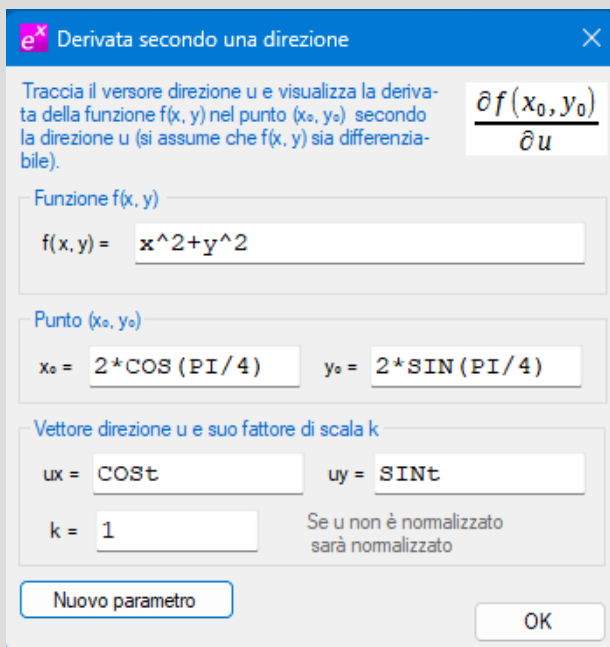
Consideriamo ad esempio la curva di livello $x^2 + y^2 = 4$, il punto $P = (2\cos(\pi/4), 2\sin(\pi/4))$ e tracciamo il gradiente in P. Le figure seguenti mostrano la finestra d'impostazione per il gradiente e la situazione nel piano dove sono stati tracciati anche la circonferenza e il punto P.



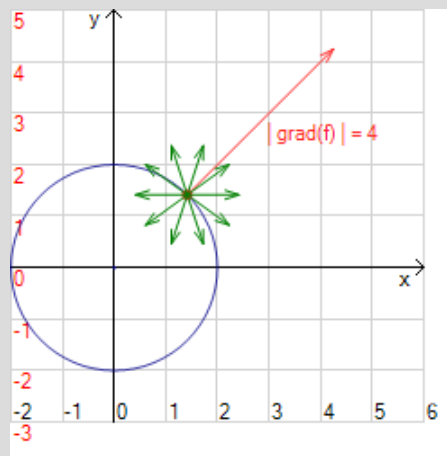
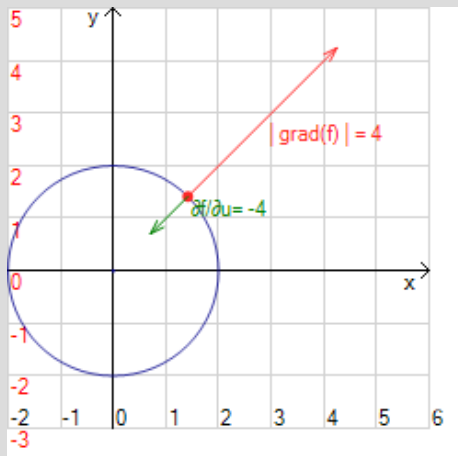
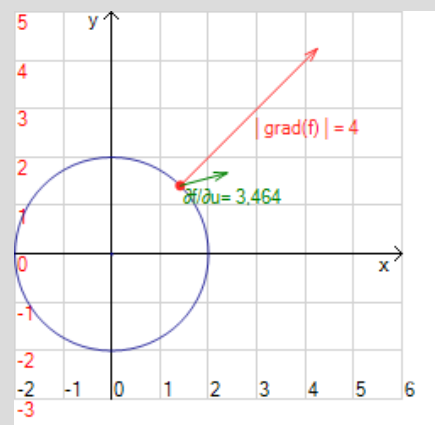
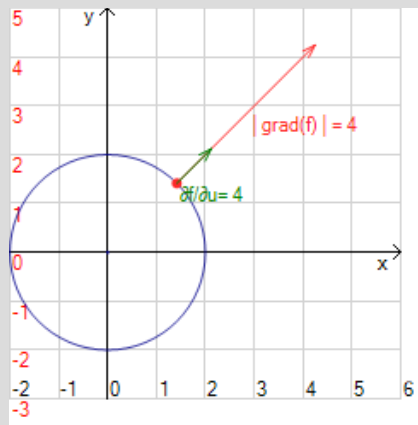
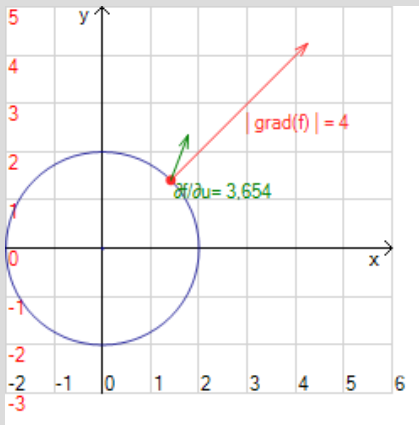
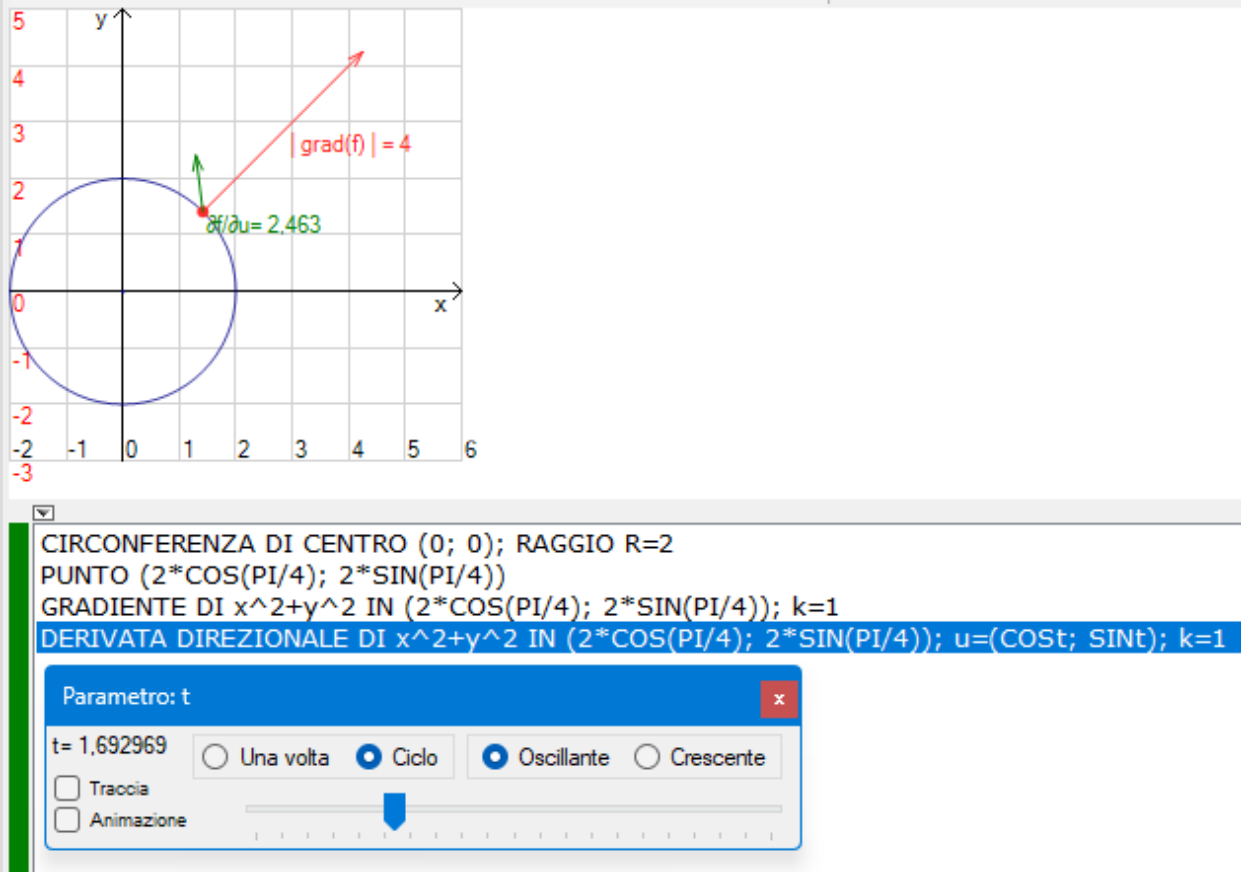
Ora visualizziamo la derivata direzionale in P secondo la direzione $u(t)$ del vettore parametrico

$$u(t) = (\cos t, \sin t) \text{ con } 0 \leq t \leq 2\pi$$

Le figure seguenti mostrano la finestra d'impostazione per la derivata.



Le figure seguenti mostrano la situazione nel piano: facendo variare con continuità, mediante la sliderbar, il vettore direzione $u(t)$, quello verde, ci si rende conto che la derivata direzionale raggiunge il suo massimo quando u si sovrappone al gradiente e dunque il gradiente punta nella direzione della massima pendenza; inoltre il modulo del gradiente è proprio uguale al valore massimo raggiunto dalla derivata direzionale.



Esempio 2

Data la funzione $f(x, y) = x^4 + y^4 - 8(x^2 + y^2)$ tracciare le tre curve di livello $f(x, y) = 0$, $f(x, y) = -10$, $f(x, y) = -20$ e verificare visivamente che il gradiente della funzione è sempre perpendicolare alle curve di livello in ogni loro punto.

Per tracciare le curve di livello useremo l'opzione *Oggetti grafici - Luogo di punti*, la figura a fianco mostra la finestra d'impostazione relativa alla terza curva. Notare che il luogo di zeri da inserire è $f(x, y) + 20 = 0$. In modo analogo procederemo negli altri due casi.

Luogo di punti

Insieme dei punti della regione rettangolare R del piano tali che:

- prima opzione (luogo di zeri) $f(x, y) = 0$
- seconda opzione $f(x, y) < 0$
- terza opzione $f(x, y) > 0$

Esempio in figura: sono tracciati $\cos(xy) = 0$, $\cos(xy) > 0$ (in rosso) e $\cos(xy) < 0$ (in azzurro)

Condizione che definisce il luogo

$f(x, y) = 0$ $f(x, y) < 0$ $f(x, y) > 0$

$f(x, y) =$

Regione rettangolare R individuata da $x_1 \leq x \leq x_2$ e $y_1 \leq y \leq y_2$

$x_1 =$ $x_2 =$ num. intervalli =

$y_1 =$ $y_2 =$

[Imposta l'attuale regione di piano visualizzata](#)
[Traccia il bordo della regione R](#)

[Guida](#) ESC per interrompere

Nel nostro caso non è banale parametrizzare le curve di livello perciò tracciamo il gradiente della funzione $f(x, y)$ in un generico punto di coordinate (a, b) dichiarando i due parametri (la finestra d'impostazione nella figura a fianco). Traceremo anche il punto (a, b) .

Le figure seguenti mostrano il gradiente in alcuni punti delle curve di livello, operando col le sliderbar relative ai parametri a e b potremo tracciare il gradiente nei punti desiderati. La curva blu rappresenta la curva di livello 0, le curve rosse il livello -10 e quelle verdi il livello -20.

Gradiente

Traccia il gradiente della funzione $f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0) e ne visualizza il modulo o le componenti.

$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right)$

Visualizza il modulo Visualizza le componenti

Visualizza solo il vettore

Funzione $f(x, y)$

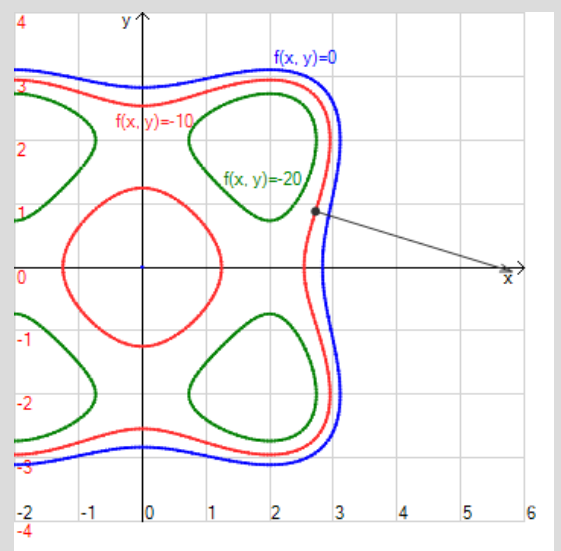
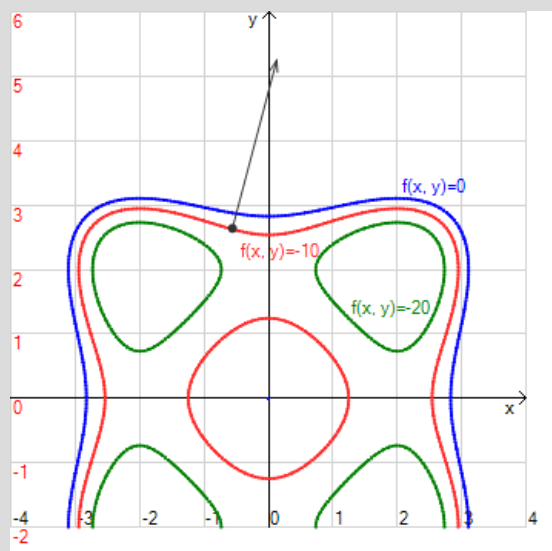
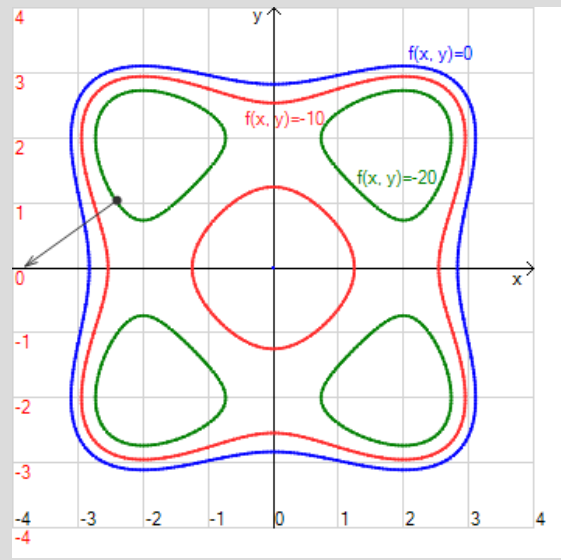
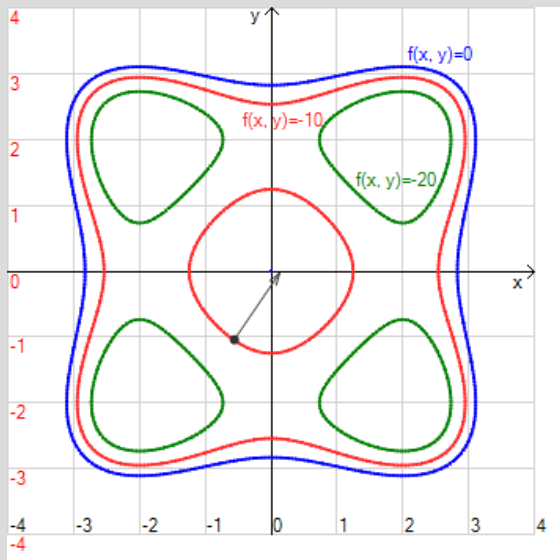
$f(x, y) =$

Punto (x_0, y_0)

$x_0 =$ $y_0 =$

Fattore di scala per il gradiente

$k =$



Esempio 3

Data la funzione $f(x, y) = x^4 + y^4 - 8(x^2 + y^2)$ dell'esempio precedente studiare la natura dei punti stazionari cioè dei punti del piano in cui il gradiente è nullo (vettore nullo).

Per risolvere il sistema

$$f_x = 4x^3 - 16x = 0$$

$$f_y = 4y^3 - 16y = 0$$

utilizziamo l'opzione *Calcolo – Soluzioni sistema* $\{f(x, y) = 0, g(x, y) = 0\}$; la figura seguente mostra la finestra di impostazione; nella tabella a sola lettura della stessa finestra si leggono, dopo aver dato l'ok, le 9 soluzioni; facendo clic su ciascuna riga della tabella viene tracciato il punto relativo.

Soluzioni sistema

Soluzioni del sistema
 $f(x, y) = 0$
 $g(x, y) = 0$
 in una data regione R del piano.
 Algoritmo utilizzato: Newton-Raphson 2D.

Funzioni $f(x, y)$, $g(x, y)$ a primo membro del sistema

$f(x, y) = 4x^3 - 16x$

$g(x, y) = 4y^3 - 16y$

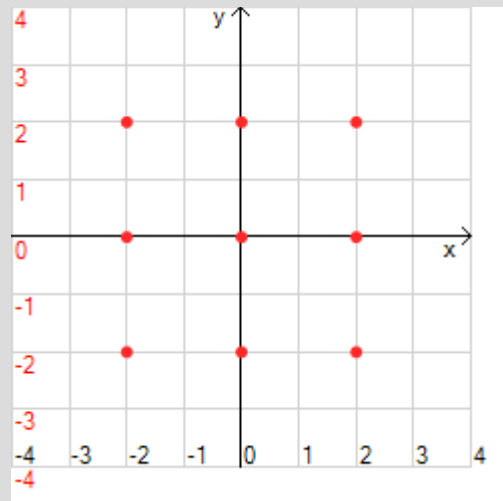
Regione rettangolare R individuata da $x_1 \leq x \leq x_2$ e $y_1 \leq y \leq y_2$

$x_1 = -4$ $x_2 = 4$ Num. intervalli =
 $y_1 = -4$ $y_2 = 4$ 50

[Imposta l'attuale regione di piano visualizzata](#)
[Traccia il bordo della regione R](#)

[Guida](#) ESC per interrompere OK

x	y
-2	-2
-2	2
-2	0
2	-2
2	2



Ora noi sappiamo che i **punti stazionari** sono di tre tipi: punti di massimo relativo, punti di minimo relativo, punti di sella. Per discriminare le tre situazioni senza ricorrere all'hessiano, terremo presente che un punto (x_0, y_0) è:

- (1) un massimo relativo se in un suo intorno si ha $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$;
- (2) un minimo relativo se in un suo intorno si ha $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$;
- (3) un punto di sella se in **ogni** suo intorno ci sono punti (x, y) in cui $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ e punti in cui $f(x, y) < f(x_0, y_0)$.

Nel nostro caso è facile verificare (opzione calcolatrice) che si ha:

$$f(-2, 0) = f(0, 2) = f(2, 0) = f(0, -2) = -16$$

$$f(-2, 2) = f(2, 2) = f(2, -2) = f(-2, -2) = -32$$

$$f(0, 0) = 0$$

Per studiare il segno della funzione $f(x, y)+16$ useremo l'opzione *Oggetti grafici – Luogo di punti*, la figura seguente mostra la finestra d'impostazione per evidenziare i punti tale che sia $f(x, y)+16 < 0$; in modo analogo evidenzieremo i punti in cui è $f(x, y)+16 > 0$ e la curva di livello $f(x, y)+16 = 0$. A fianco della finestra di impostazione si vede la situazione nel piano: i colori impostati sono nell'ordine blu, rosso e nero.

e^x Luogo di punti

Insieme dei punti della regione rettangolare R del piano tali che:

- prima opzione (luogo di zeri) $f(x, y) = 0$
- seconda opzione $f(x, y) < 0$
- terza opzione $f(x, y) > 0$

Esempio in figura: sono tracciati $\cos(xy) = 0$, $\cos(xy) > 0$ (in rosso) e $\cos(xy) < 0$ (in azzurro)

Condizione che definisce il luogo

$f(x, y) = 0$ $f(x, y) < 0$ $f(x, y) > 0$

$f(x, y) =$

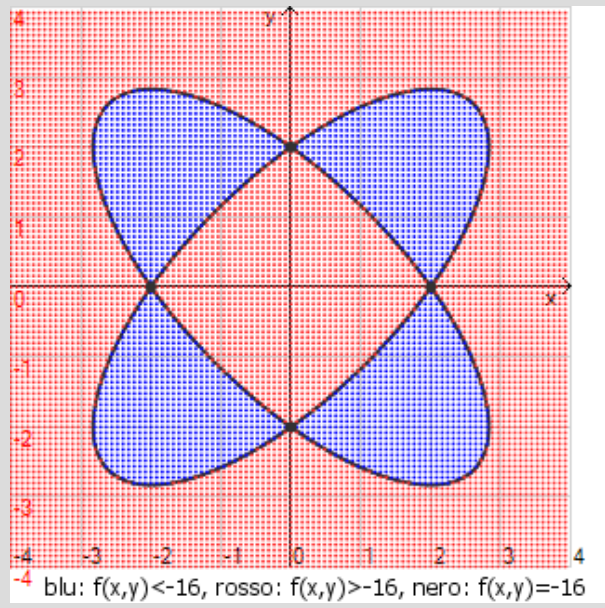
Regione rettangolare R individuata da $x_1 \leq x \leq x_2$ e $y_1 \leq y \leq y_2$

$x_1 =$ $x_2 =$ num. intervalli =

$y_1 =$ $y_2 =$

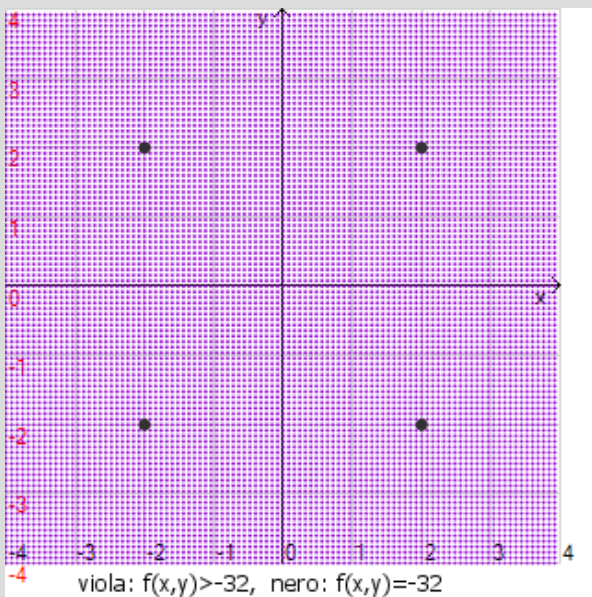
[Imposta l'attuale regione di piano visualizzata](#)
[Traccia il bordo della regione R](#)

[Guida](#) ESC per interrompere



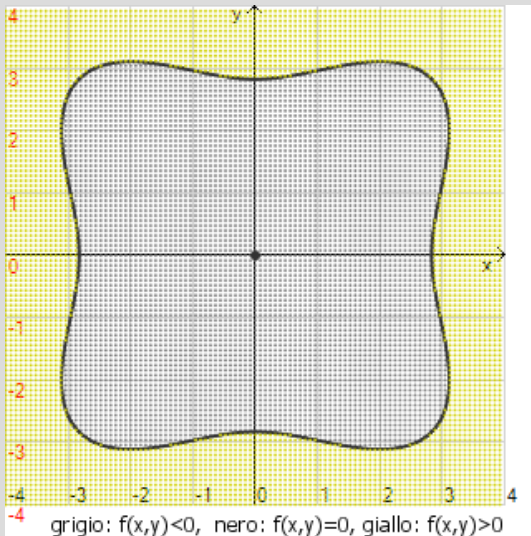
Ne segue che i punti $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$ sono punti di sella, in ogni loro intorno troviamo sia punti blu sia punti rossi.

Procederemo in modo analogo per studiare il segno della funzione $f(x, y) + 32$.



Osservando la figura ci rendiamo conto che i punti $(-2, 2)$, $(2, 2)$, $(2, -2)$, $(-2, -2)$ sono punti di minimo relativo, esiste un loro intorno in cui si ha $f(x, y) \geq -32$ (punti viola e quattro punti neri).

E ancora in modo analogo studieremo il segno di $f(x, y)$.



Osservando la figura ci rendiamo conto che il punto $(0, 0)$, è di massimo relativo, esiste un suo intorno in cui si ha $f(x, y) \leq 0$ (punti neri e punti grigi).

Esempio 4

Determinare massimo e minimo assoluto della funzione

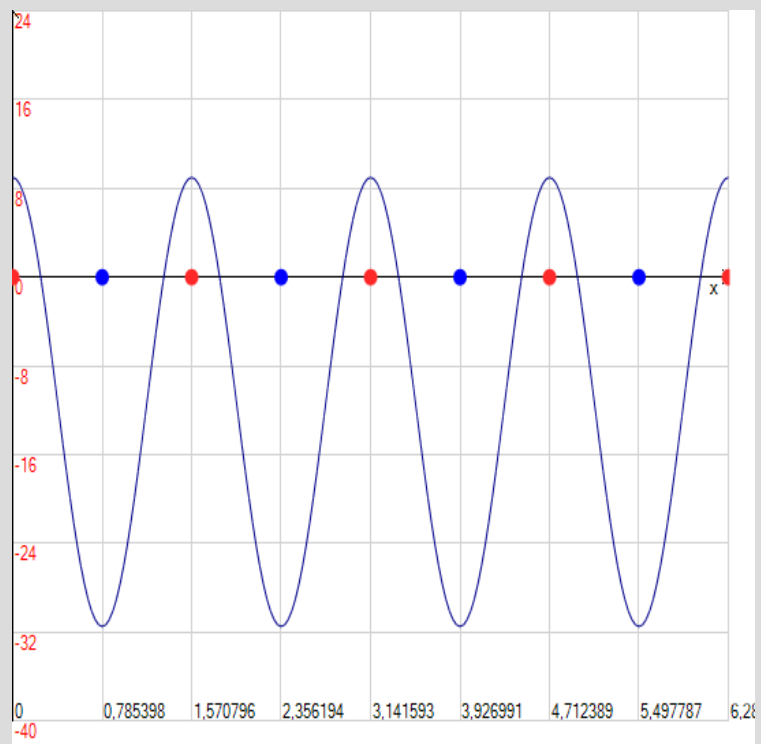
$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 8(x^2 + y^2)$$

(la funzione dell'es. precedente) nell'insieme D dei punti (x, y) tali che $x^2 + y^2 \leq 9$.

L'insieme D è compatto (chiuso e limitato) e la funzione continua, ne segue per il teorema di Weierstrass l'esistenza di massimo e minimo in D . Come è noto i punti di massimo o minimo assoluto sono da ricercare tra i punti stazionari (già fatto nell'esempio precedente), tra i punti singolari cioè tra i punti dove non è definito il gradiente (nel nostro caso non ce ne sono), tra i punti del bordo.

Per individuare i punti estremali sul bordo consideriamo la restrizione di f al bordo di D di equazioni parametriche, ad es.,

$$x(t) = 3\cos t, \quad y(t) = 3\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



Per tracciare il grafico della funzione $f(x(t), y(t))$ della figura precedente utilizziamo l'opzione *Oggetti grafici - Curva parametrica*. Visualizziamo inoltre la tabella relativa alla curva con passo $\pi/4$ (figura seguente).

e^x Tabella curva parametrica
✕

Funzione di $[a, b]$ in $\mathbb{R}^2: t \rightarrow (x(t), y(t))$

$x(t) =$

$y(t) =$

Intervallo $[a, b]$ e passo per t

a = b = passo =

Cifre decimali (arrotondamento) = ▾

[Leggimi](#)

	t	x(t)	y(t)
▶	0	0	9
	0,7853981634	0,7854	-31,5
	1,5707963268	1,5708	9
	2,3561944902	2,3562	-31,5
	3,1415926536	3,1416	9
	3,926990817	3,927	-31,5
	4,7123889804	4,7124	9
	5,4977871438	5,4978	-31,5
	6,2831853072	6,2832	9

I punti di massimo sono: $0, \pi/2, \pi, 3/2\pi$ con massimo uguale a 9. I punti di minimo sono: $\pi/4, 3/4\pi, 5/4\pi, 7/4\pi$ con minimo uguale a -31,5. Unendo queste informazioni con quanto visto nell'esempio precedente si conclude che il minimo assoluto in D è -32 e il massimo assoluto è 9.