Rotore

Se *V(x, y)=(f(x, y), g(x, y))* è un campo vettoriale, il *rotore 2D* di V è così definito:

$$\mathrm{rot}(V) = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$$

EffeDiX può:

(1) determinare l'**approssimazione numerica** del rotore di V in un dato punto (x_0, y_0);

(2) tracciare i punti (x, y) di una data regione rettangolare R del piano tali che il rotore di V in tali punti sia positivo;

(3) tracciare i punti (x, y) di una data regione rettangolare R del piano tali che il rotore di V in tali punti sia negativo;

(4) tracciare i punti (x, y) di una data regione rettangolare R del piano tali che il rotore di V appartenga ad un dato intervallo (a, b).

L'opzione da utilizzare è *Calcolo – Rotore 2D di un campo vettoriale*.

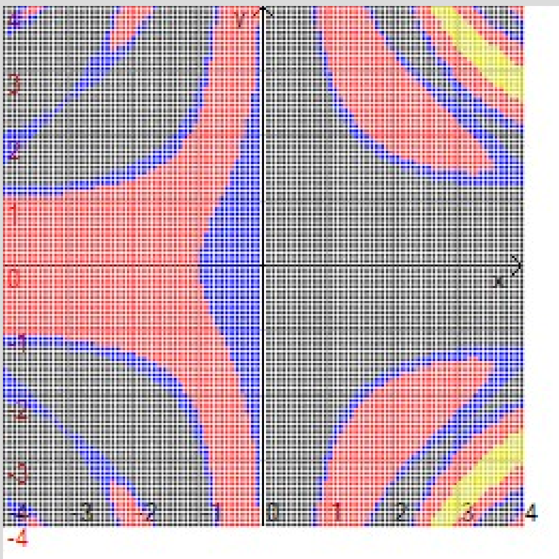
Esempio 1

Sia V il campo vettoriale *(x siny, cos(xy))*. Evidenziare i punti (x, y) della regione R del piano con -4 < x < 4, -4 < y < 4 tali che:

(1) il rotore sia negativo;
(2) il rotore sia compreso tra 0 e 1;
(3) il rotore sia compreso tra 1 e 5;
(4) il rotore sia maggiore di 5 (compreso tra 5 e 10^8).

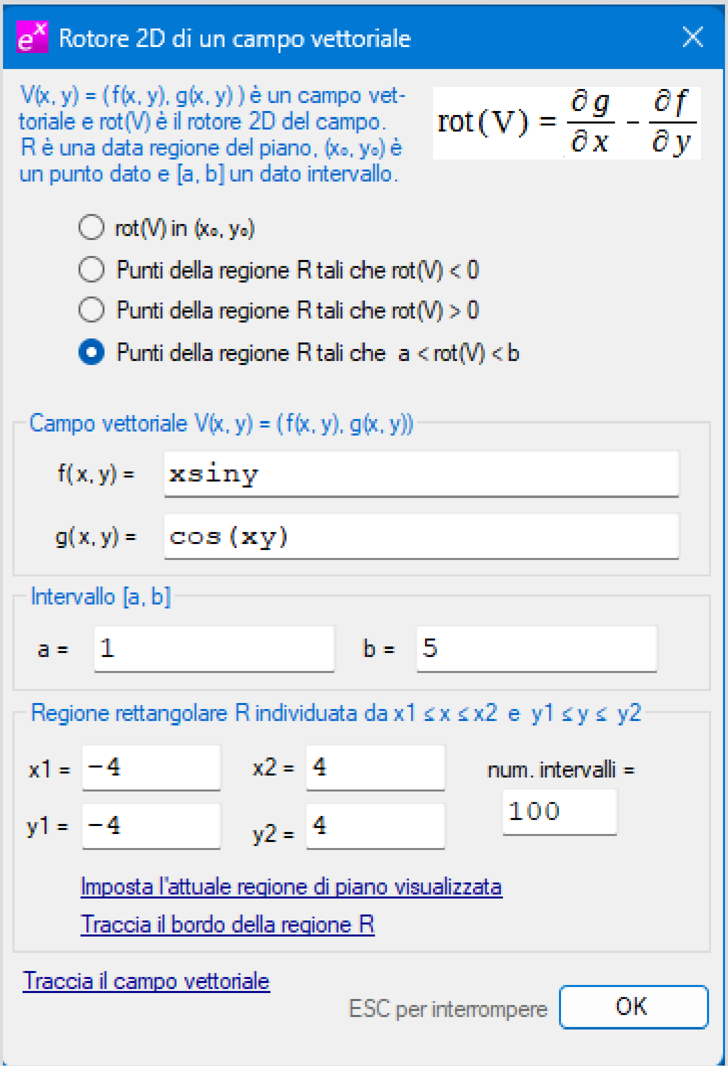
Calcolare inoltre il rotore nel punto (3,5; -3).

La figura seguente mostra i quattro sottoinsiemi della regione R.



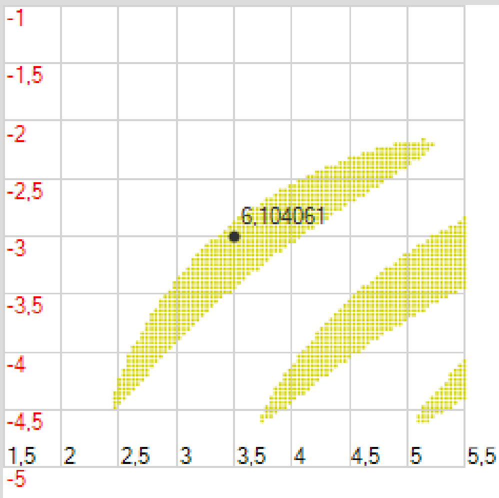
In nero sono evidenziati i punti con rotore negativo, in blu i punti con rotore compreso tra 0 e 1, in rosso i punti con rotore compreso tra 1 e 5, in giallo i punti con rotore maggiore di 5. I punti con rotore nullo sono i punti di frontiera tra la regione nera e quella blu. Notare che ciascuna regione è un insieme topologicamente disconnesso (cioè composto da parti separate).

La figura seguente mostra la finestra d'impostazione per evidenziare i punti con rotore compreso tra 1 e 5; in modo analogo si procederà negli altri casi.



Per studiare con più accuratezza le zone di frontiera tra regioni contigue conviene zoomare e rigenerare i punti dopo aver reimpostato la regione R di ricerca facendo clic sul link "Imposta l'attuale regione di piano visualizzata". L'accuratezza dipende anche, ovviamente, dal numero di intervalli impostati.

La figura seguente mostra il valore del rotore nel punto (3,5; -3) che si trova nella regione gialla; per meglio evidenziare la situazione è stata effettuata una zoomata sulla regione che contiene il punto e per maggior accuratezza la regione gialla è stata rigenerata dopo la zoomata, avendo reimpostato la regione R come si è già detto.



Esempio 2

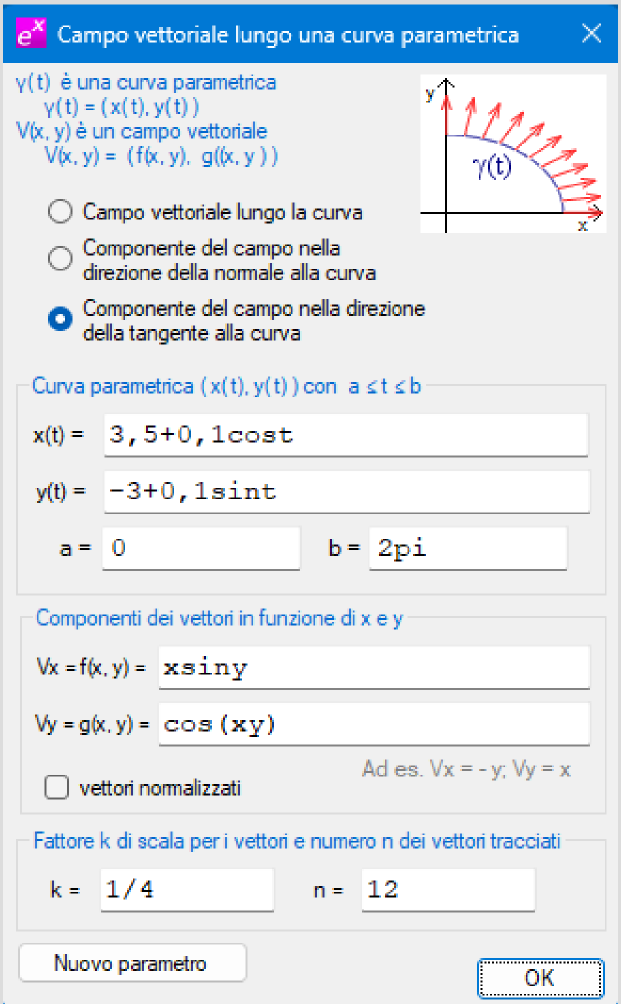
Per avere un’idea intuitiva del rotore si può pensare che il campo vettoriale V rappresenti il campo delle velocità di un fluido; ogni particella del fluido che si trova in un certo punto si muove secondo il relativo vettore del campo con origine nel punto (quindi si muove nella direzione e verso del vettore e con velocità scalare pari al modulo del vettore); naturalmente la particella che si muove con continuità nel campo interagisce con continuità con i vettori del campo che generalmente variano da punto a punto. Ora consideriamo un piccolo intorno (tendenzialmente infinitesimo) di un punto P del piano, ad esempio un intorno circolare, e immaginiamo che in P sia posta una piccola rotellina a pale: il rotore in P, se non è nullo, ci fornisce informazioni sul verso orario o antiorario di rotazione e sulla velocità di rotazione della rotellina. Se in P il rotore è positivo, la rotazione è in senso antiorario, se negativo in senso orario. Nel caso di rotore nullo il campo è *irrotazionale* in P e la rotellina verrebbe trascinata senza ruotare.

Ragionando sui vettori del campo lungo il bordo circolare dell’intorno bisogna tener presente che per valutare verso e velocità di rotazione della rotellina quello che conta è la componente **tangenziale** dei vettori (cioè la componente dei vettori nella direzione della tangente al bordo dell’intorno); ne segue che osservando semplicemente il campo vettoriale in un intorno del punto in molti casi l’idea che se ne ricava può essere fuorviante.

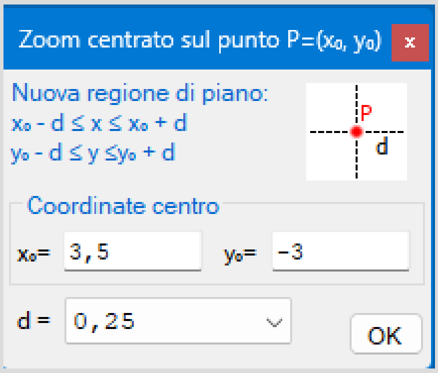
Consideriamo ora il caso concreto del campo vettoriale *V=(xsiny, cos(xy))* dell’esempio 1; vogliamo rappresentare graficamente il fatto che il rotore nel punto (3,5; -3) è positivo (quindi rotazione antioraria del fluido).

Useremo l’opzione *Oggetti grafici – Campo vettoriale – Campo vettoriale lungo una curva*, la figura a fianco ne mostra la finestra d’impostazione.

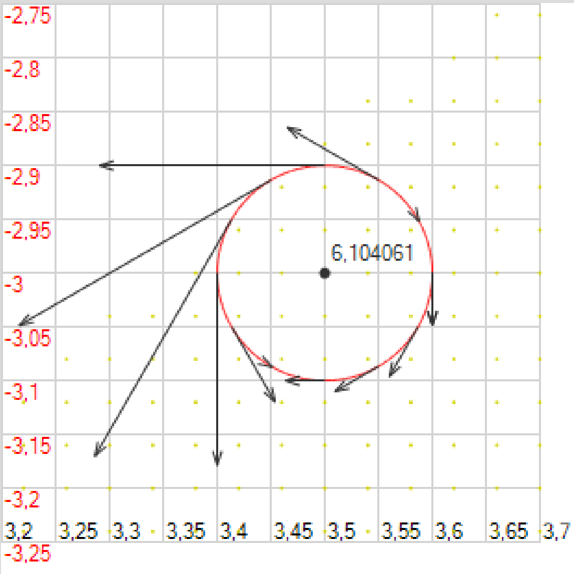
Notare che è stata selezionata la componente tangenziale dei vettori del campo alla curva; la curva considerata che rappresenta il bordo dell’intorno è una circonferenza centrata in (3,5; -3) e di raggio 0,1; tutti i vettori hanno modulo ridotto in scala di fattore 1/4.

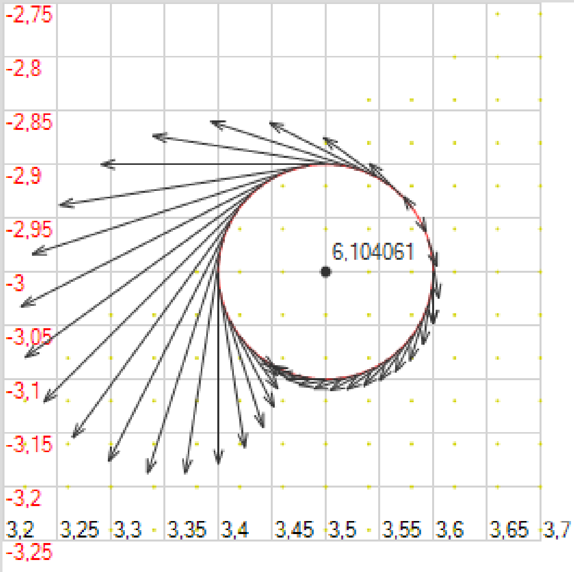


Per zoomare sull'intorno del punto utilizzare il pulsante per lo zoom centrato che si trova a destra del piano cartesiano (vedi figura a fianco).



Le figure seguenti mostrano la rappresentazione grafica che si ottiene e mostrano con chiarezza che la rotazione è antioraria, infatti prevalgono ampiamente, in modulo, i vettori che determinano la rotazione antioraria rispetto a quelli che si oppongono; nella figura a sinistra sono tracciati 12 vettori tangenti alla curva, in quella a destra 40.





Esempio 3

Per il teorema di Gauss-Green si ha

$$\oint_{\gamma} \vec{V}\cdot\vec{T}\ \mathrm{ds} = \oint_{\gamma} \mathrm{f(x,\ y)dx + g(x,\ y)dy} = \iint_{D} \mathrm{rot}(\vec{V})\ \mathrm{dx\ dy}$$

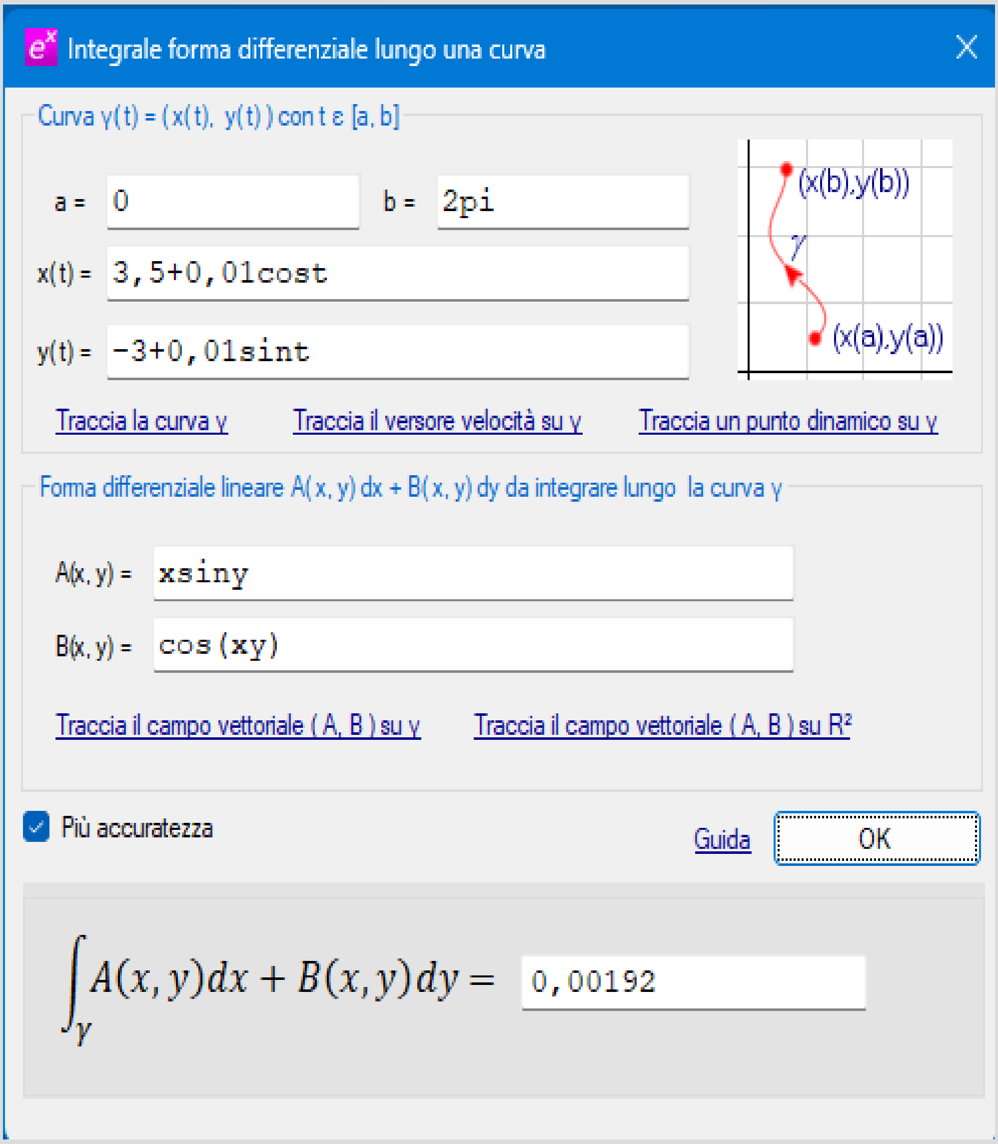
dove V è un campo vettoriale, γ è una curva chiusa percorsa in modo da lasciare a sinistra il suo interno e D è la regione di piano che ha γ per frontiera; dunque l'integrale di linea di un campo vettoriale V lungo una curva chiusa γ equivale all'integrale doppio del rotore V sul dominio D di cui γ costituisce la frontiera. Ora se consideriamo un punto (x_0, y_0) e un suo **piccolo** intorno circolare I di raggio r, possiamo assumere, per continuità, che il rotore di V in I sia approssimativamente costante ed uguale al rotore in (x_0, y_0); quindi

$$\oint_{\partial I} \vec{V}\cdot\vec{T}\ \mathrm{ds} = \iint_{I} \mathrm{rot}(\vec{V})\ \mathrm{dx\ dy}\ \approx\ \mathrm{rot}(V_{(x0,\,y0)})(\pi r^2)$$

da cui

$$\mathrm{rot}(V_{(x0,y0)}) \approx \frac{\oint_{\partial I} \vec{V} \cdot \vec{T}\ \mathrm{ds}}{(\pi r^2)}$$

Verifichiamo quest’ultima importante approssimazione nel caso del campo V dell’esempio precedente, prendendo come intorno I l’intorno circolare di raggio 0,01 del punto (3,5; -3), punto in cui sappiamo che il rotore è 6,104061. La figura seguente mostra la finestra d’impostazione per l’integrale.



Verifica: 0,00192 /(π 0,01^2) ≈ 6,1

Nota: dall’approssimazione

$$\mathrm{rot}(V_{(x0,y0)}) \approx \frac{\oint_{\partial I} \vec{V} \cdot \vec{T}\ \mathrm{ds}}{(\pi r^2)}$$

segue un'altra possibile definizione di rotore che mette in luce la sua relazione con un integrale di linea

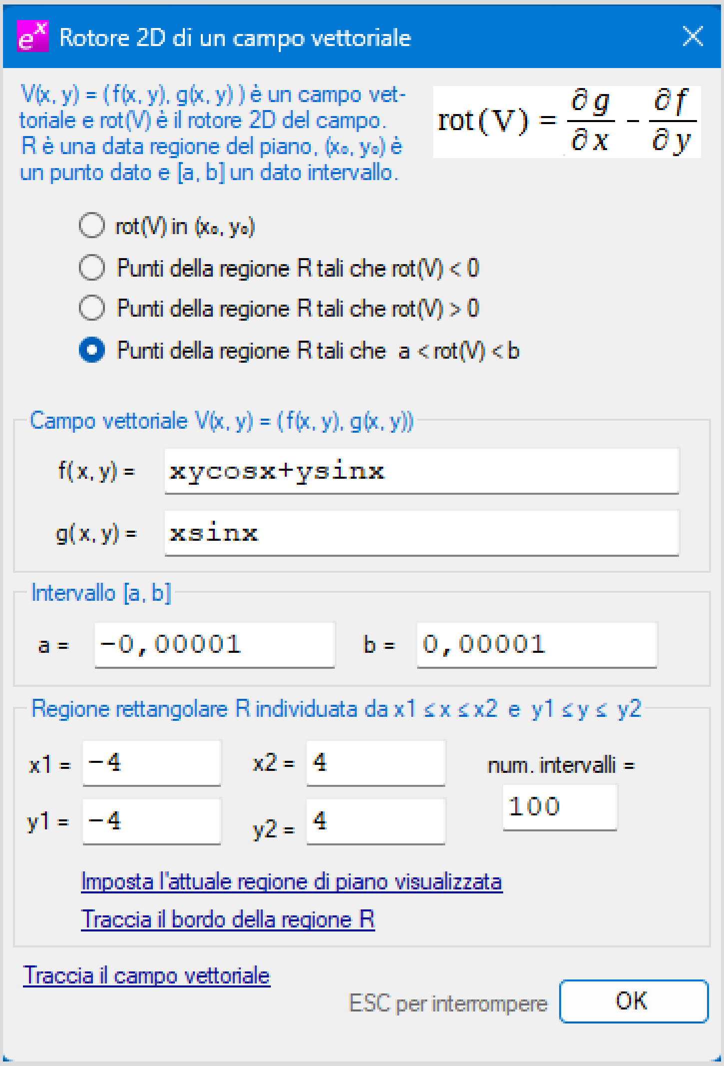
$$\mathrm{rot}(V_{(x0,y0)}) = \lim_{r \to 0} \frac{\oint_{\partial I(r)} \vec{V} \cdot \vec{T} \; ds}{(\pi r^2)}$$

dove *I(r)* indica un intorno circolare di raggio *r* del punto (x_0, y_0).

Esempio 4

Considerare la regione R del piano con -4<x<4, -4<y<4. Verificare che il campo vettoriale *V=(xycosx+ysinx, xsinx)* è irrotazionale nella regione R semplicemente connessa. Ne segue, per un noto teorema, che V è un campo **conservativo** e l'integrale di linea di V lungo una **qualsiasi** curva chiusa è nullo; fare una verifica su qualche curva a scelta.

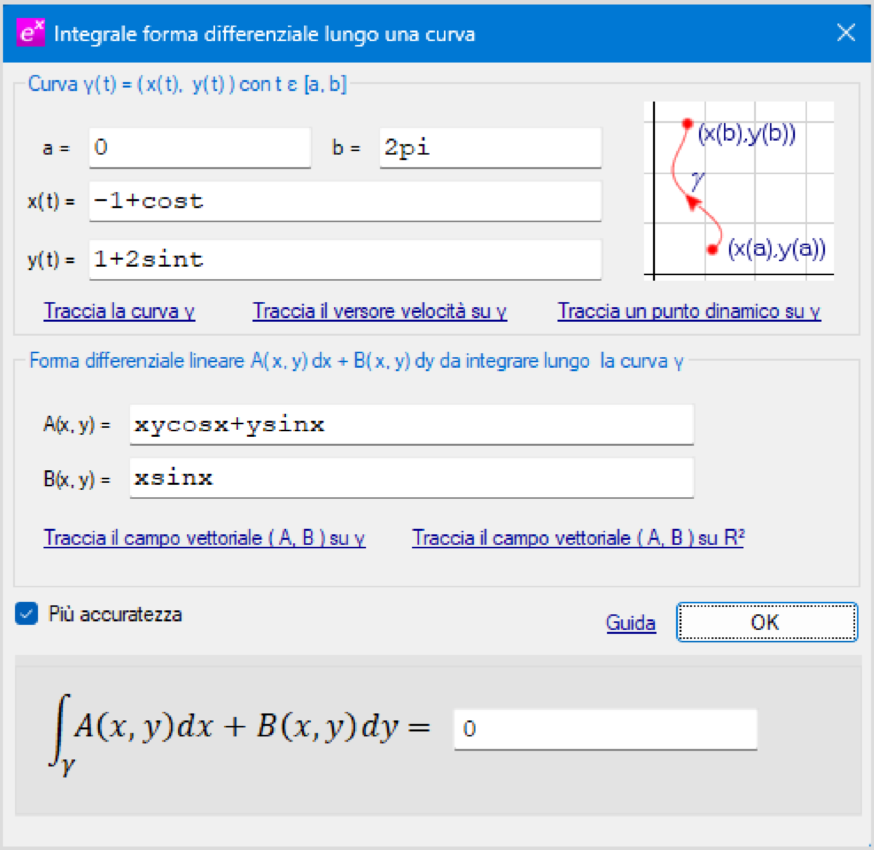
Finestra di impostazione per la verifica che rot(V)=0 in R.



Finestra di impostazione per verificare, ad esempio, che l'integrale di linea di V lungo l'ellisse di equazioni parametriche

$x(t)=-1+cost,$
$y(t)=1+2sint$

con $0≤t≤2pi$ è nullo.



In figura due curve chiuse: l'ellisse già citata e la curva di equazioni parametriche

$x(t)=2^{\wedge}sint \quad y(t)=2+cost \quad 0≤t≤2pi$