Sistemi autonomi di equazioni differenziali[1]

Con EffeDiX potremo tracciare le soluzioni di sistemi di equazioni differenziali sia autonomi sia non autonomi. Per i sistemi autonomi utilizzeremo l'opzione *Curva integrale – Soluzione sistema autonomo EDO*. I sistemi autonomi che potremo affrontare con EffeDiX sono della forma

$$x' = f(x, y)$$
$$y' = g(x, y)$$

dove x=x(t) e y=y(t) sono funzioni incognite. Un sistema di questo tipo si chiama **autonomo** perché nelle equazioni non appare esplicitamente la variabile indipendente *t*. Ogni soluzione del sistema è una curva parametrica di equazioni x=x(t) e y=y(t) tale che

$$(*) \quad \begin{aligned} x'(t) &= f(x(t), y(t)) \\ y'(t) &= g(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

e prende il nome di **traiettoria** o **orbita** o **curva integrale.**

Ad esempio il sistema

$$x' = -6x-5y$$
$$y' = 3x+2y$$

è autonomo (ed è, in questo caso, lineare); è autonomo anche il sistema

$$x' = \sin y$$
$$y' = \cos x$$

ma non è lineare. E' invece non autonomo ad esempio il sistema

$$x' = -6x-5y+t$$
$$y' = 3x+2y-3t$$

Il teorema di Cauchy garantisce che, sotto opportune ipotesi di regolarità per le funzioni f(x, y) e g(x, y), esiste, almeno localmente, un'**unica** coppia di funzioni x(t), y(t) che sia soluzione del sistema (*) e verifichi le **condizioni iniziali**

$$x(0) = x_0$$
$$y(0) = y_0$$

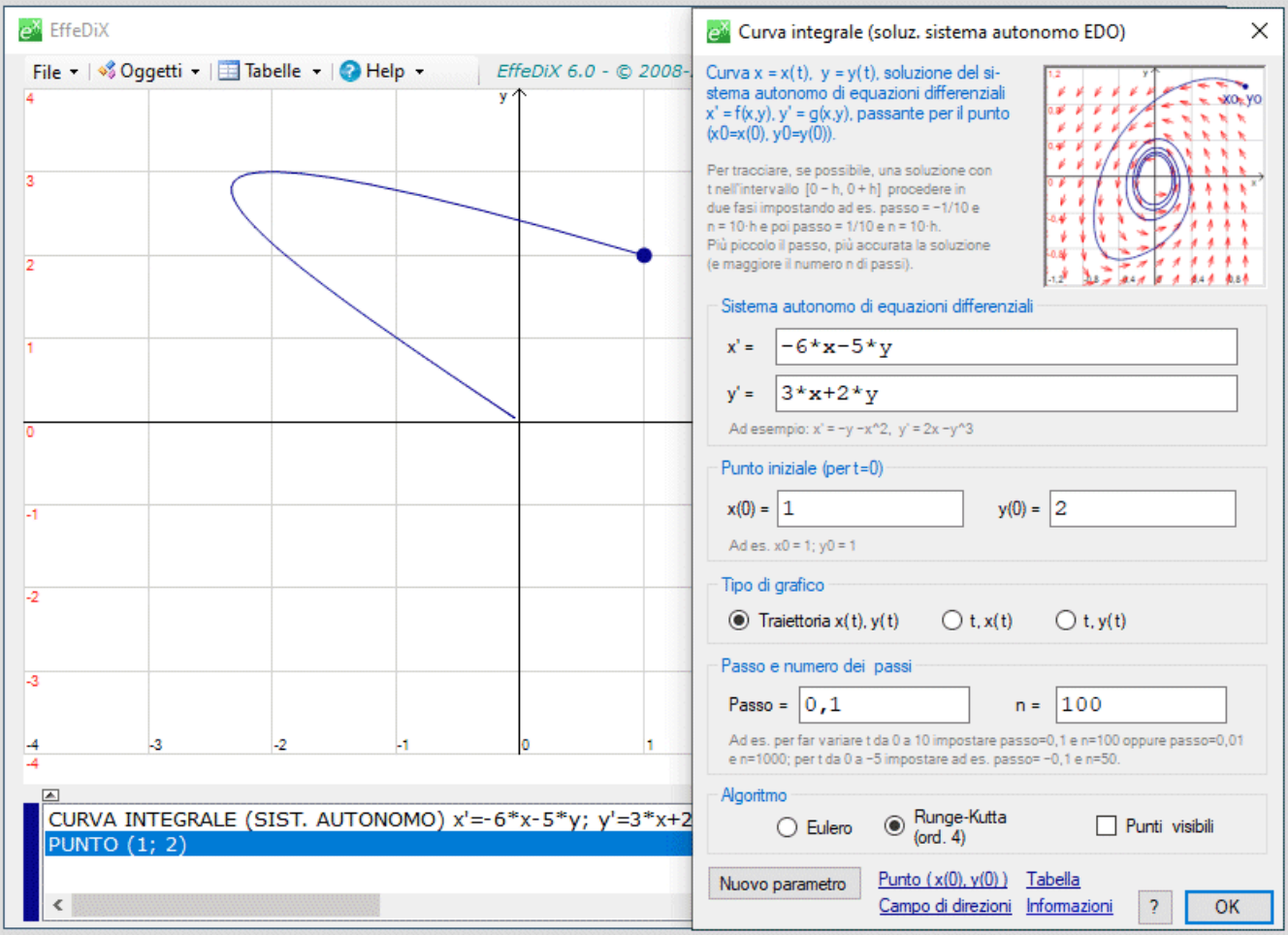
cioè **esiste** ed è **unica** la curva integrale che passa per il punto (x_0, y_0) in t=0. Si osservi però che il più delle volte non saremo in grado di esprimere le funzioni x(t), y(t) in termini di funzioni elementari.

Utilizziamo l'opzione *Curva integrale – Soluzione sistema autonomo EDO* di EffeDiX per determinare graficamente l'unica soluzione del sistema

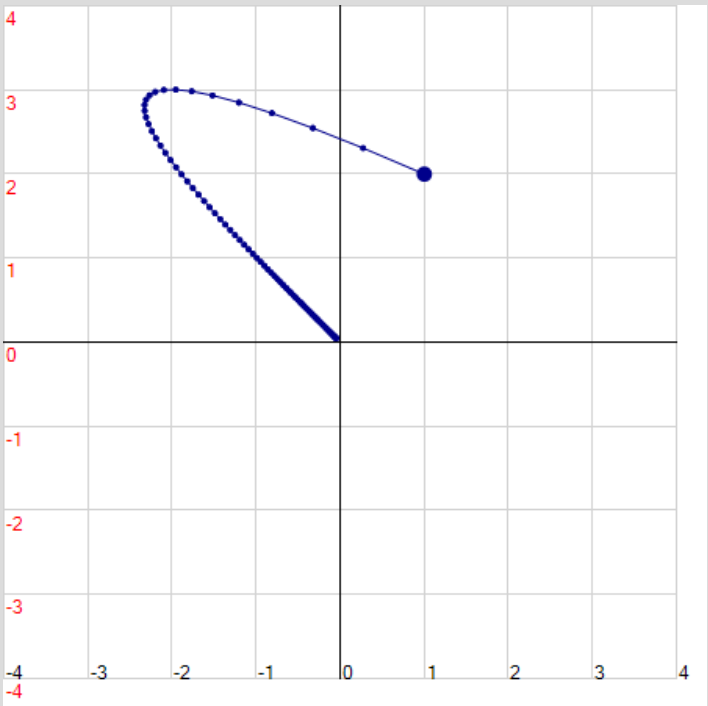
$$x' = -6x-5y$$
$$y' = 3x+2y$$

passante, ad esempio, per il punto (1, 2). Il tipo di grafico selezionato è *Traiettoria*. Tenete presente che EffeDiX traccia la traiettoria partendo dal punto (x_0, y_0) e incrementando *t*, inizialmente uguale a 0, di un dato passo (positivo o negativo) per un dato numero di passi. Nella situazione in figura il passo è 0,1 e sono impostati 100 passi: questo significa che la curva soluzione x(t), y(t) sarà tracciata per *t* che va da 0 a 0,1 * 100 = 10. Per una soluzione più accurata potremmo scegliere ad esempio un passo pari a 0,05 con 200 passi.

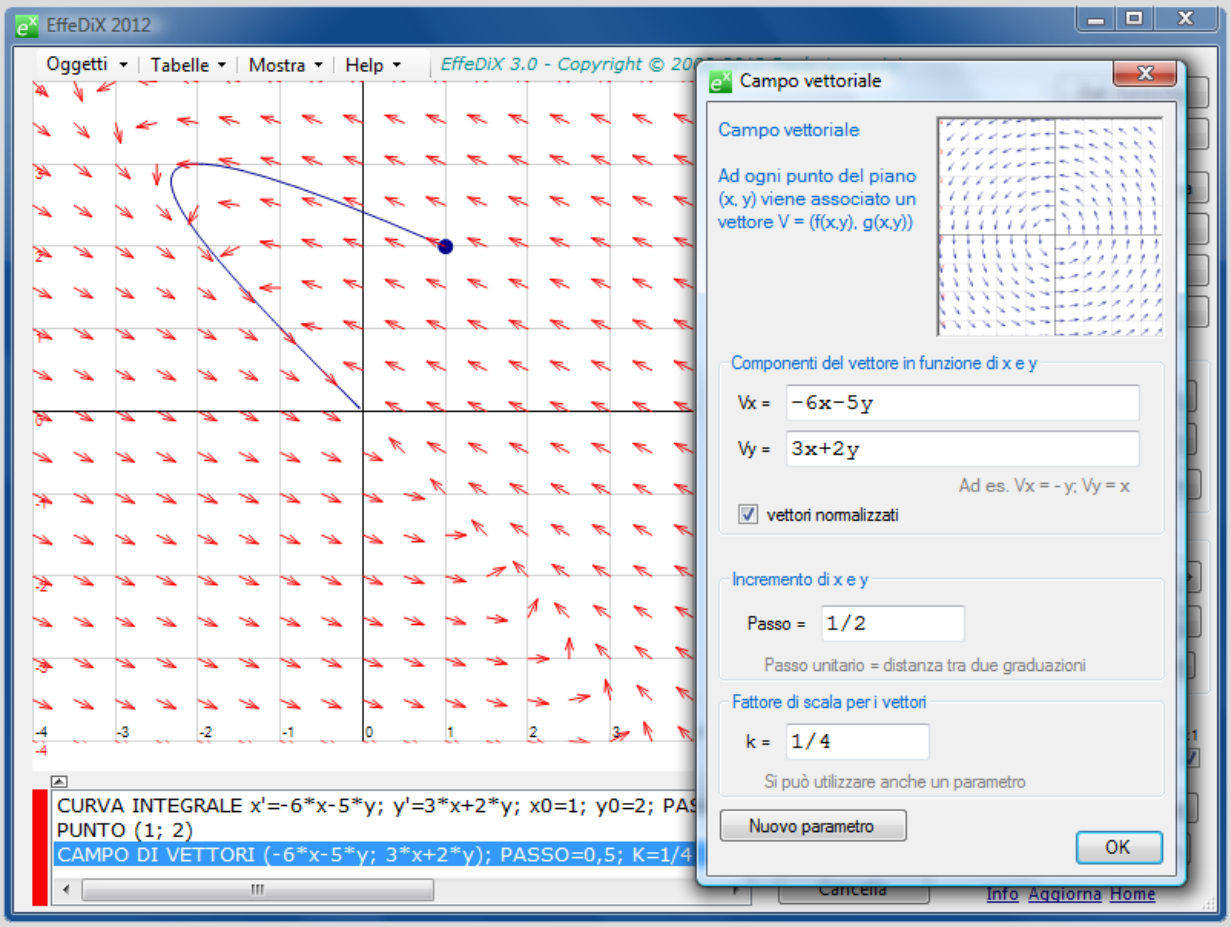
Dei due possibili algoritmi per la soluzione numerica del sistema, l'algoritmo di Eulero e l'algoritmo di Runge-Kutta, è selezionato per impostazione predefinita il più efficiente e accurato dei due cioè Runge-Kutta. E' stato anche tracciato il punto iniziale (1, 2). Vedete la finestra di impostazione e la traiettoria nella figura seguente.



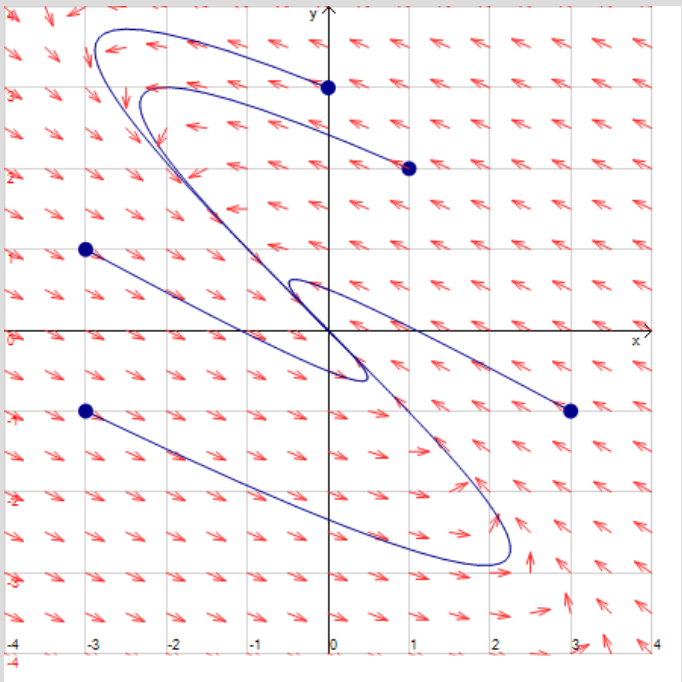
La figura a fianco mostra la curva soluzione ottenuta mettendo la spunta sulla casella *Punti visibili* della finestra di impostazione. Qui si vedono i 100 punti della traiettoria generati da EffeDiX (e si può notare che si addensano intorno all'origine). La traiettoria converge all'origine che è un **punto fisso** per il sistema (se il punto iniziale fosse il punto fisso, la traiettoria sarebbe ridotta a questo solo punto, come puoi verificare con EffeDiX).



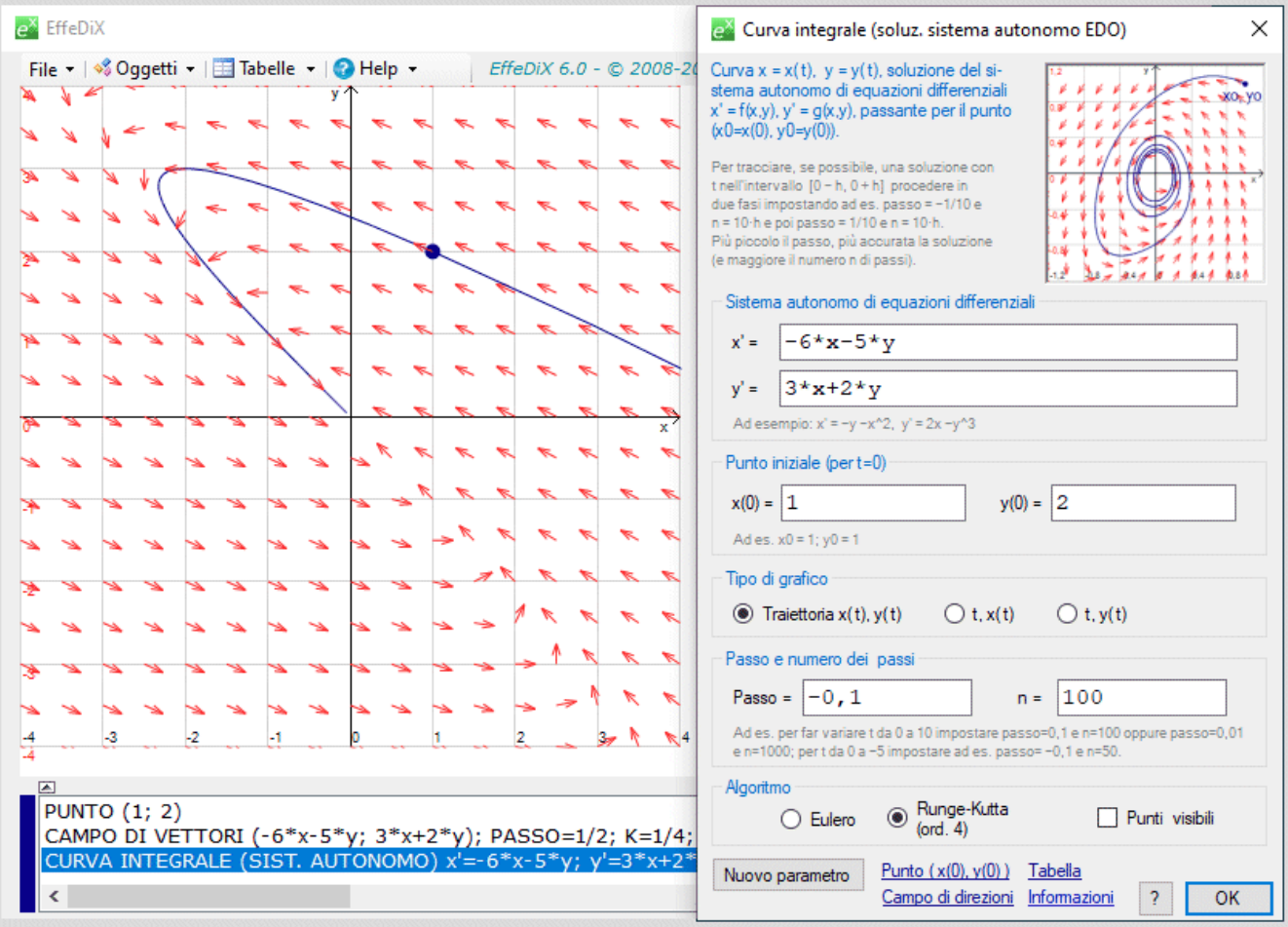
La schermata seguente mostra il **campo di direzioni** associato al nostro sistema: la traiettoria è tangente in ogni suo punto al relativo vettore del campo (provate a zoomare localmente sulla curva, trascinando il mouse mentre premete il pulsante destro). Per generare automaticamente il campo basta fare clic sulla voce *Campo di direzioni* che vedete in blu nella finestra di impostazione della prima figura.



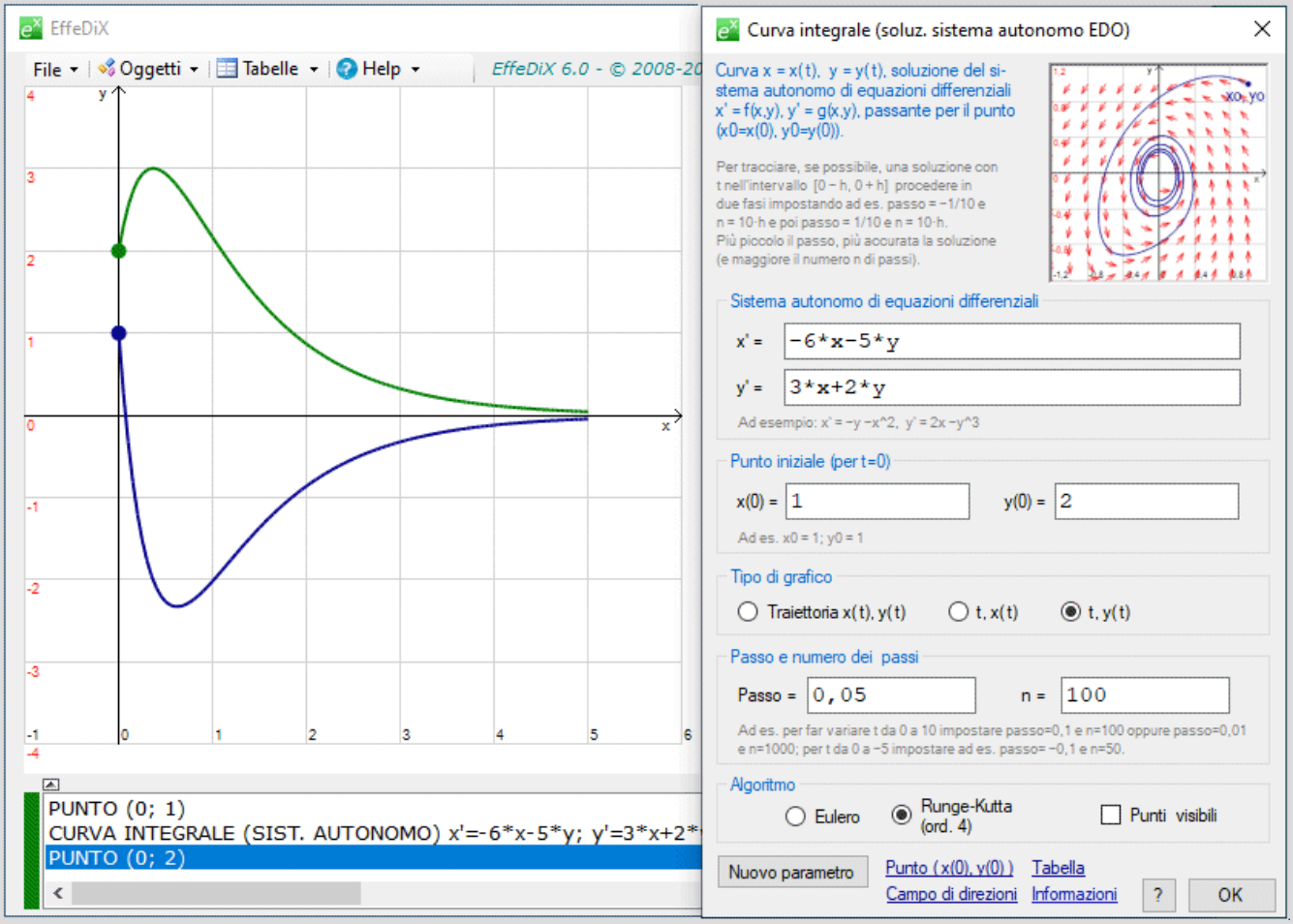
Osservando il campo di direzioni ci rendiamo conto che **qualunque** sia il punto iniziale, la traiettoria tende all'origine che è l'unico punto fisso del sistema. Potete verificarlo con EffeDiX, parametrizzando le coordinate del punto iniziale.



E' anche possibile ottenere la traiettoria "all'indietro" impostando un passo negativo, ad esempio -0,1: i punti della traiettoria si muovono, al decrescere di *t* e a partire dal punto iniziale, in senso opposto a quello dei vettori (vedi schermata seguente). Se pensiamo alla variabile *t* come al tempo, tracciare una traiettoria con passo positivo significa muoversi nel futuro seguendo il flusso dei vettori mentre se il passo è negativo ci muoviamo nel passato, contro il flusso dei vettori, partendo sempre dal punto iniziale. Nella situazione in figura, passo -0,1 e 100 passi, *t* varia dal valore iniziale t=0 al valore t=-10. Torneremo su questo aspetto quando esamineremo l'opzione tabella.



Se nella finestra di impostazione scegliete l'opzione *Tipo di grafico (t, x(t))*, otterrete il grafico della funzione x(t) al variare di *t*. Notate che, se il passo è 0,05 e il numero di passi 100, *t* varia da 0 a 5. Analogamente, impostando il *Tipo di grafico (t, y(t))*, otterrete il grafico della funzione y(t) al variare di *t*. Nella schermata seguente vedete in blu il grafico di x(t) e in verde quello di y(t), notate che x(0)=1 e y(0)=2. Abbiamo la conferma che entrambe le funzioni tendono a 0 per *t* crescente (per *t* che tende a +∞).

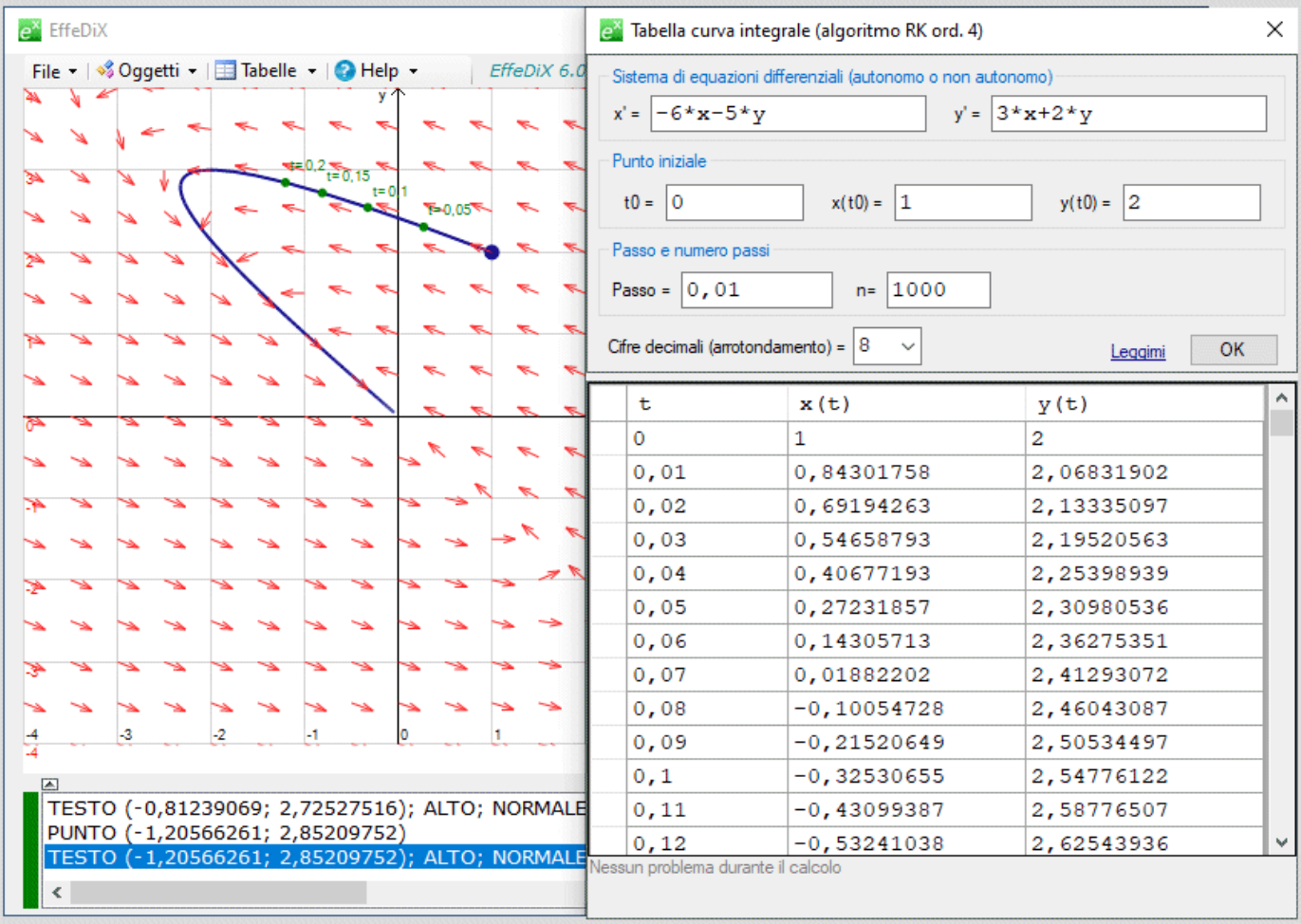


Nel nostro caso possiamo risolvere il problema di Cauchy in termini di funzioni elementari; la soluzione analitica è fornita dalle funzioni

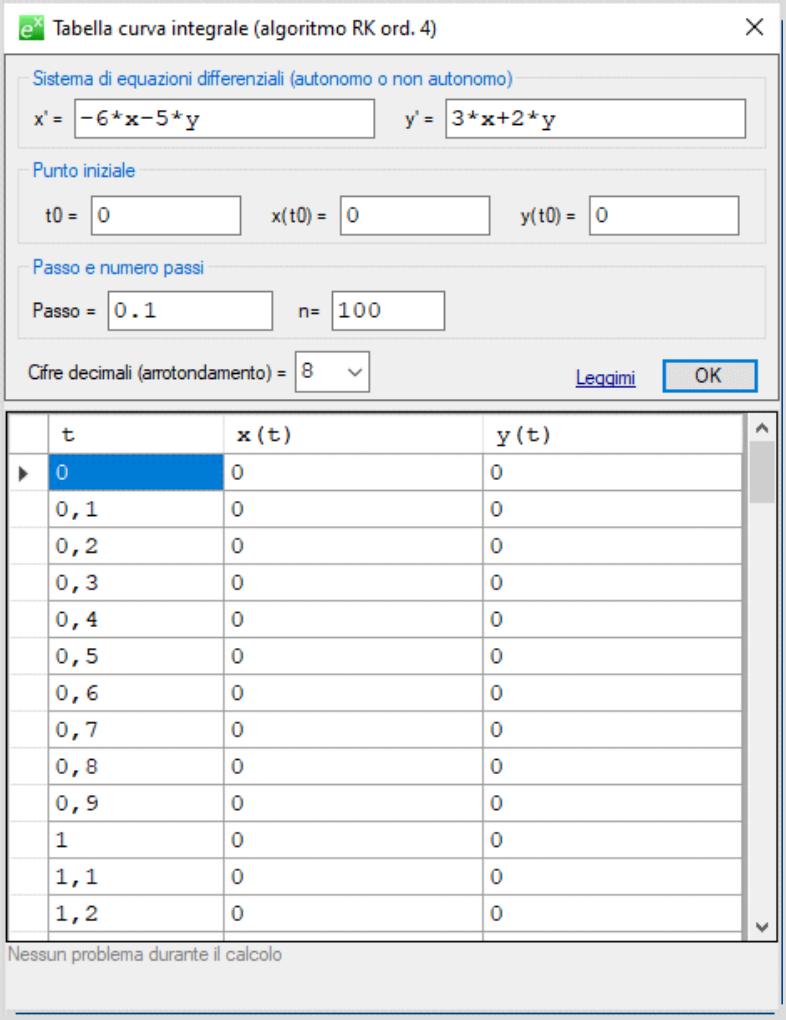
$$x(t) = \frac{15}{2}e^{-3t} - \frac{13}{2}e^{-t}$$
$$y(t) = -\frac{9}{2}e^{-3t} + \frac{13}{2}e^{-t}$$

Potete verificare che il grafico della soluzione analitica (tracciabile con l'opzione *Curva parametrica*) si sovrappone al grafico generato da EffeDiX mediante l'algoritmo di Runge-Kutta.

Per ottenere valori accurati per le funzioni x(t), y(t) si può generare una tabella mediante l'opzione *Tabella* che trovate in blu nella finestra di impostazione. Nella schermata seguente vedete la tabella relativa al nostro sistema e al solito punto iniziale; per avere una maggiore accuratezza qui si è scelto un passo uguale a 0,01 (e sono impostati 1000 passi per cui *t* varia tra 0 e 10). Facendo shift + doppio clic su una riga della tabella viene tracciato il relativo punto della traiettoria con il corrispondente valore di *t*; ad esempio nella schermata seguente vedete, in verde, i punti relativi a t=0,05, t=0,1, a t=0,15 e a t=0,2. Notate che per tempi crescenti i punti si muovano seguendo il flusso dei vettori.



t	x(t)	y(t)
0	1	2
0,01	0,84301758	2,06831902
0,02	0,69194263	2,13335097
0,03	0,54658793	2,19520563
0,04	0,40677193	2,25398939
0,05	0,27231857	2,30980536
0,06	0,14305713	2,36275351
0,07	0,01882202	2,41293072
0,08	-0,10054728	2,46043087
0,09	-0,21520649	2,50534497
0,1	-0,32530655	2,54776122
0,11	-0,43099387	2,58776507
0,12	-0,53241038	2,62543936



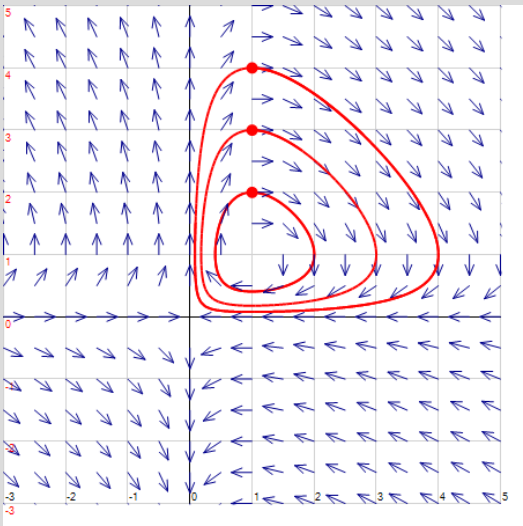
t	x(t)	y(t)
0	0	0
0,1	0	0
0,2	0	0
0,3	0	0
0,4	0	0
0,5	0	0
0,6	0	0
0,7	0	0
0,8	0	0
0,9	0	0
1	0	0
1,1	0	0
1,2	0	0

Se nella tabella impostate come punto iniziale l'origine potete verificare che tale punto è un punto fisso per il sistema, si ha infatti x(t)=0 e y(t)=0 per ogni *t*.

Esempio Determinare graficamente le curve soluzione del sistema autonomo (del tipo preda-predatore)

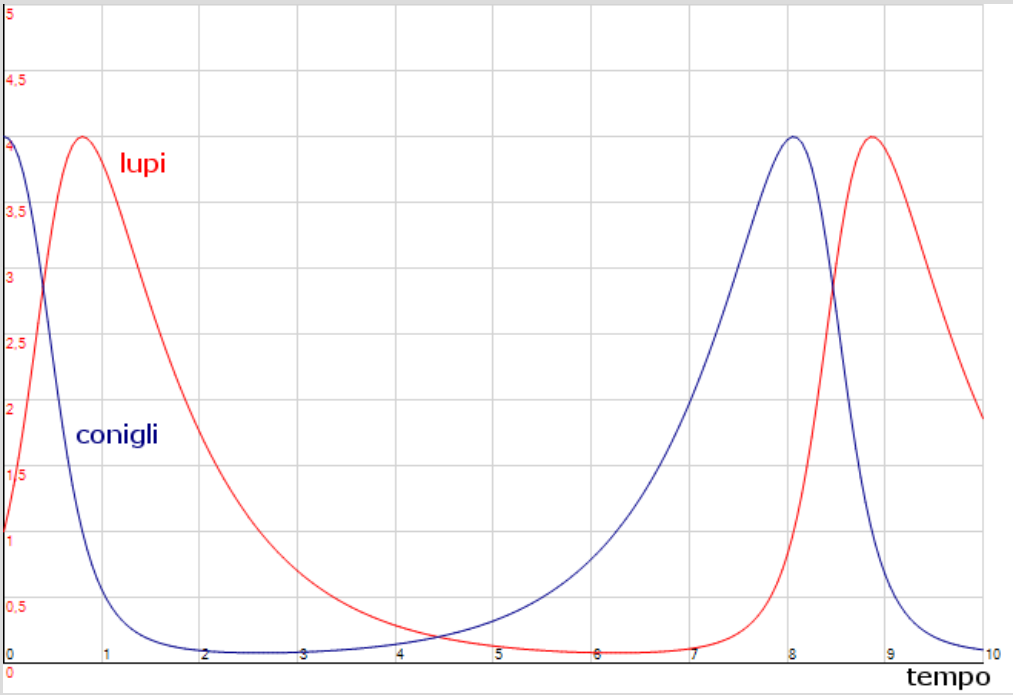
$$x' = -x + xy$$
$$y' = y - xy$$

passanti rispettivamente per i punti (1, 2), (1, 3), (1, 4). Qui la funzione x(t) indica il numero dei **predatori** in funzione del tempo (ad esempio il numero dei lupi in un determinato territorio) e y(t) il numero delle **prede** (ad esempio il numero dei conigli). Questo sistema di equazioni differenziali è **non lineare**; le sue equazioni sono note come equazioni di Volterra-Lotka.



In situazioni come questa è anche interessante **parametrizzare il punto iniziale** per animare le curve soluzione nel piano delle fasi.

.



Vedi anche:

[campi vettoriali]

[primitiva di una funzione]

[equazioni differenziali del primo ordine]

[equazioni differenziali del secondo ordine]

[sistemi di equazioni differenziali (autonomi o non autonomi)]

[1] Per tutte le opzioni che concernono equazioni differenziali, EffeDiX fornisce soluzioni grafico-numeriche (e non analitico-simboliche). Il motore risolutivo si basa sull'algoritmo di Runge-Kutta d'ordine 4.