Sistemi di equazioni differenziali (autonomi o non autonomi)[1]

Con EffeDiX potremo tracciare le soluzioni di sistemi di equazioni differenziali sia autonomi sia non autonomi. Utilizzeremo l'opzione *Curva integrale – Soluzione sistema EDO*. I sistemi che potremo affrontare con EffeDiX sono della forma

$$(*) \quad \begin{aligned} x' &= f(x, y, t) \\ y' &= g(x, y, t) \end{aligned}$$

dove x=x(t) e y=y(t) sono funzioni incognite. Ogni soluzione del sistema è una curva parametrica di equazioni x=x(t) e y=y(t) tale che

$$(**) \quad \begin{aligned} x'(t) &= f(x(t), y(t), t) \\ y'(t) &= g(x(t), y(t), t) \end{aligned}$$

e prende il nome di **traiettoria** o **orbita** o **curva integrale.**

Nel caso di un sistema **autonomo**, cioè nel caso in cui nelle equazioni non compaia esplicitamente la variabile indipendente *t*, è preferibile utilizzare l'opzione *Curva integrale – Soluzione sistema autonomo EDO*, che implementa un algoritmo più efficiente e più veloce.

Il teorema di Cauchy garantisce che, sotto opportune ipotesi di regolarità per le funzioni f(x, y, t) e g(x, y, t), esiste, almeno localmente, un'**unica** coppia di funzioni x(t), y(t) che sia soluzione del sistema (**) e verifichi le **condizioni iniziali**

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

cioè **esiste** ed è **unica** la curva integrale che passa per il punto (x_0, y_0) per $t=t_0$. Si osservi però che per lo stesso punto possono passare più traiettorie ma per diversi valori di *t*, quindi senza violare l'unicità. Nel caso di un sistema autonomo ciò non poteva accadere, per un dato punto può passare un'unica traiettoria.

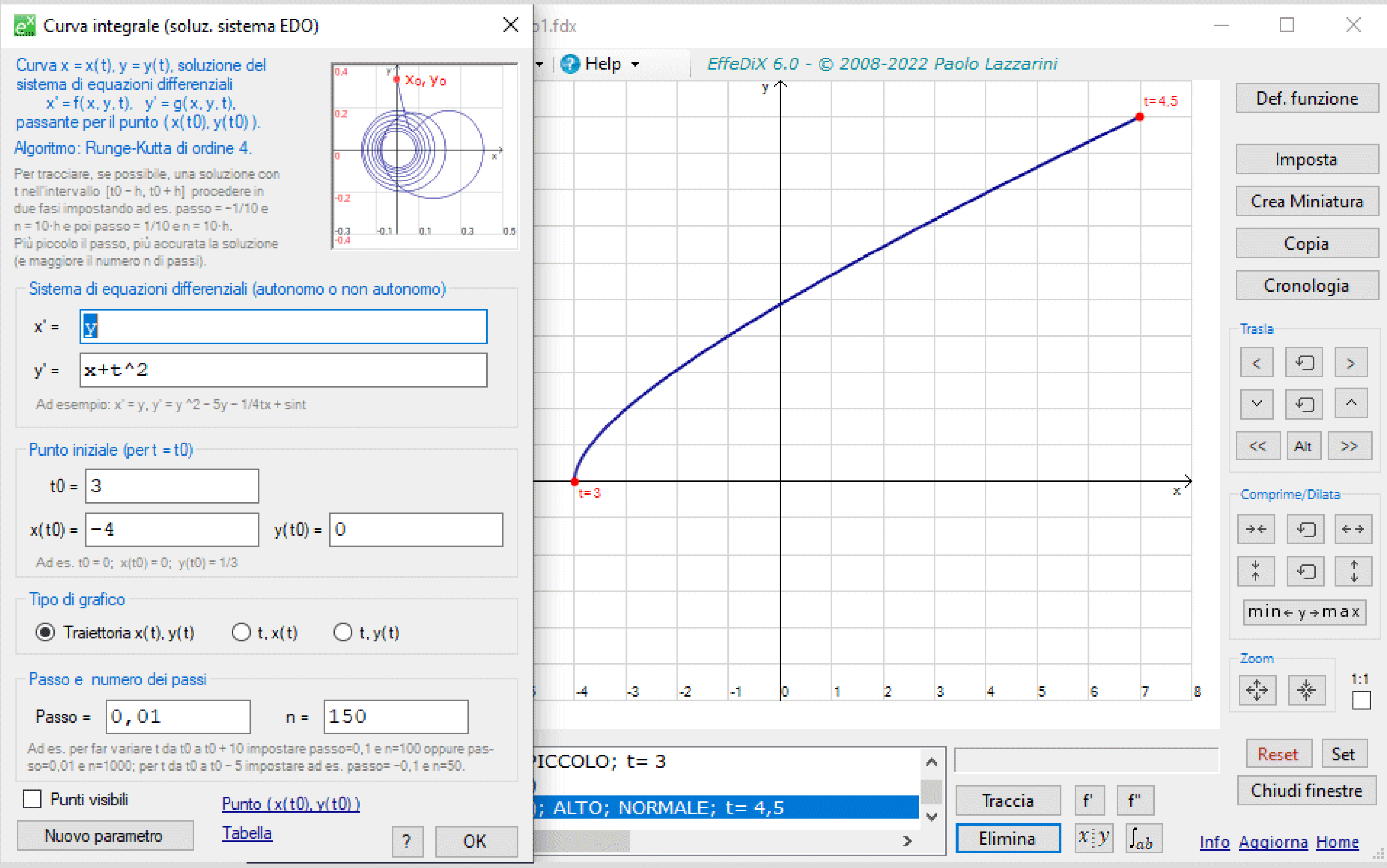
Utilizziamo l'opzione *Curva integrale – Soluzione sistema autonomo EDO* di EffeDiX per determinare graficamente l'unica soluzione del sistema non autonomo

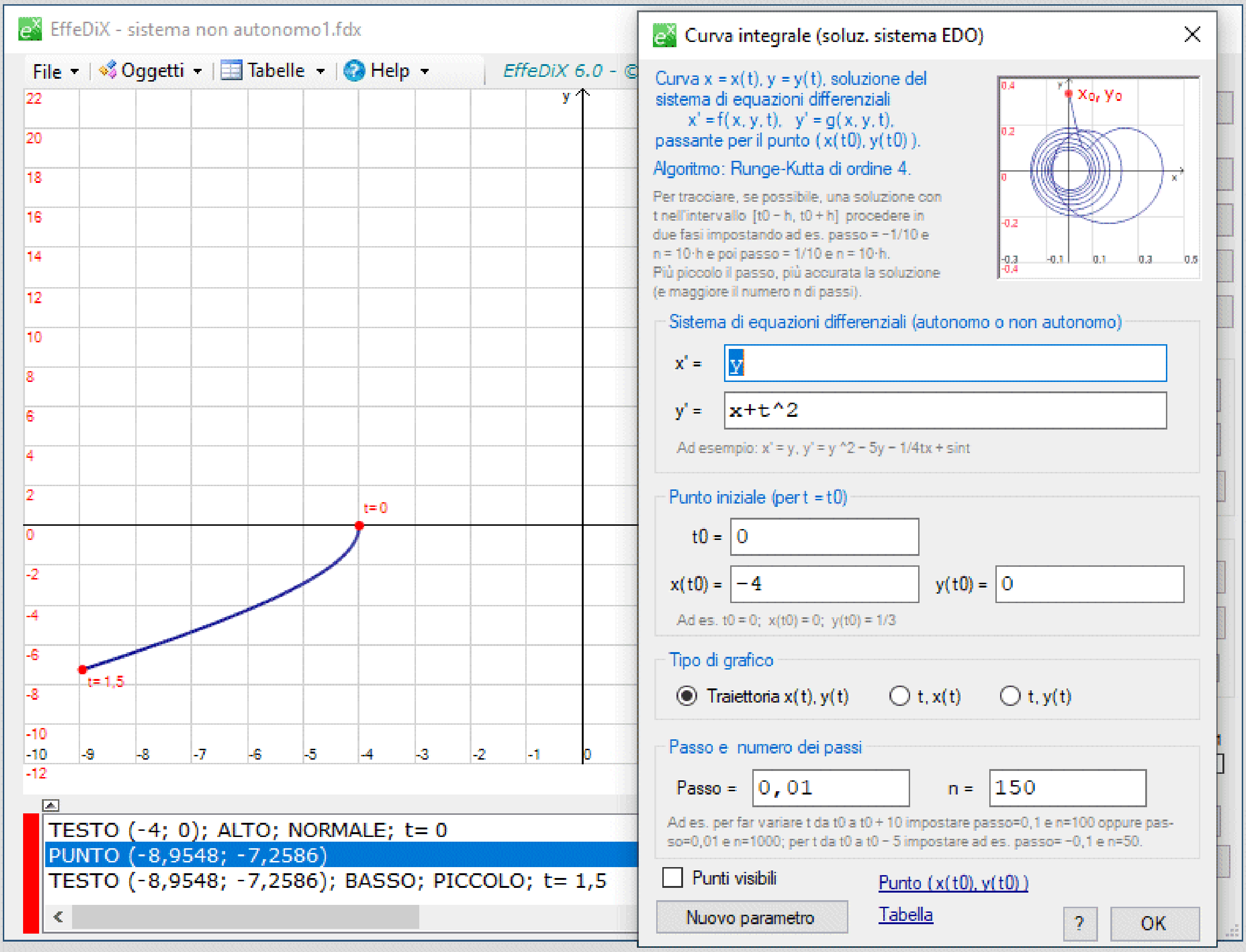
x' = y
y' = x + t^2

passante, ad esempio, per il punto (-4, 0) per $t_0=3$. Il tipo di grafico selezionato è *Traiettoria*. Tenete presente che EffeDiX traccia la traiettoria partendo dal punto (x_0, y_0) e incrementando *t*, inizialmente uguale a $t_0 = 3$, di un dato passo (positivo o negativo) per un dato numero di passi. Nella situazione della prima delle due figure seguenti il passo è 0,01 e sono impostati 150 passi: questo significa che la curva soluzione x(t), y(t) sarà tracciata per *t* che va da 3 a 0,01 * 150 = 4,5.

Da notare che nel caso di un sistema non autonomo la traiettoria è influenzata anche dal valore t_0 presente nelle condizioni iniziali. Nella seconda delle figure seguenti vedete la traiettoria ottenuta cambiando solo il valore di t_0 ($t_0=0$). La soluzione è completamente diversa.

Nel caso di un sistema autonomo noi abbiamo assunto che t_0 sia sempre uguale a 0, perché un sistema autonomo è tempo-invariante (la traiettoria non dipende da t_0): potete verificarlo utilizzando questa stessa opzione, eliminando il termine t^2 dal sistema in modo da renderlo autonomo.


Curva integrale (soluz. sistema EDO)
Curva x = x(t), y = y(t), soluzione del sistema di equazioni differenziali x' = f(x, y, t), y' = g(x, y, t), passante per il punto (x(t0), y(t0)).
Algoritmo: Runge-Kutta di ordine 4.
Per tracciare, se possibile, una soluzione con t nell'intervallo [t0 − h, t0 + h] procedere in due fasi impostando ad es. passo = −1/10 e n = 10·h e poi passo = 1/10 e n = 10·h.
Più piccolo il passo, più accurata la soluzione (e maggiore il numero n di passi).
Sistema di equazioni differenziali (autonomo o non autonomo)
x' = y
y' = x+t^2
Ad esempio: x' = y, y' = y^2 − 5y − 1/4tx + sint
Punto iniziale (per t = t0)
t0 = 3
x(t0) = −4
y(t0) = 0
Ad es. t0 = 0; x(t0) = 0; y(t0) = 1/3
Tipo di grafico
Traiettoria x(t), y(t)
t, x(t)
t, y(t)
Passo e numero dei passi
Passo = 0,01
n = 150
Ad es. per far variare t da t0 a t0 + 10 impostare passo=0,1 e n=100 oppure passo=0,01 e n=1000; per t da t0 a t0 − 5 impostare ad es. passo= −0,1 e n=50.
Punti visibili
Punto (x(t0), y(t0))
Nuovo parametro
Tabella
?
OK
Help
EffeDiX 6.0 - © 2008-2022 Paolo Lazzarini
t=4,5
t=3
Def. funzione
Imposta
Crea Miniatura
Copia
Cronologia
Trasla
Comprime/Dilata
Zoom
Reset
Set
Chiudi finestre
Traccia
Elimina
Info Aggiorna Home
ICCOLO; t= 3
; ALTO; NORMALE; t= 4,5

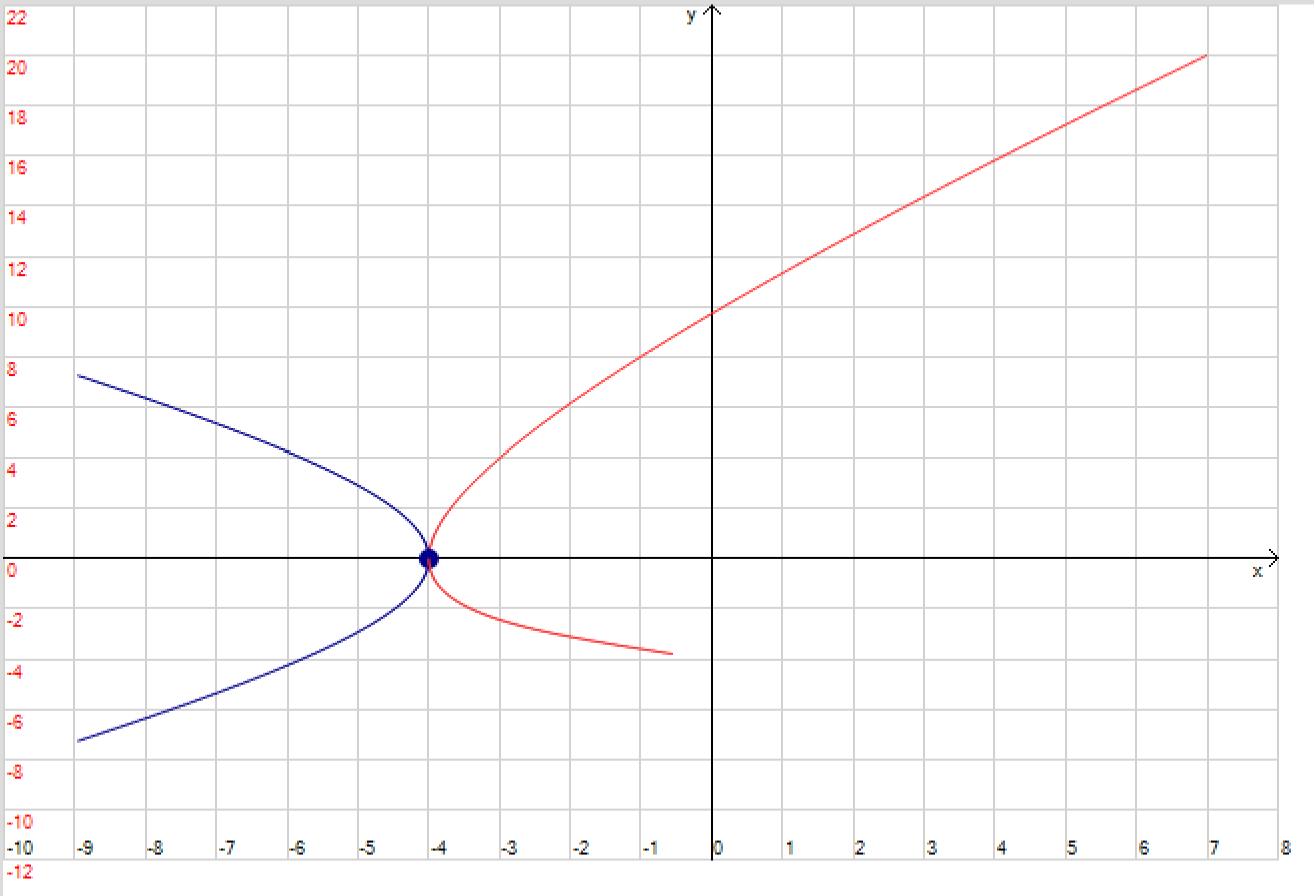

EffeDiX - sistema non autonomo1.fdx
File
Oggetti
Tabelle
Help
EffeDiX 6.0 - ©
t=0
t=1,5
TESTO (-4; 0); ALTO; NORMALE; t= 0
PUNTO (-8,9548; -7,2586)
TESTO (-8,9548; -7,2586); BASSO; PICCOLO; t= 1,5
Curva integrale (soluz. sistema EDO)
Curva x = x(t), y = y(t), soluzione del sistema di equazioni differenziali x' = f(x, y, t), y' = g(x, y, t), passante per il punto (x(t0), y(t0)).
Algoritmo: Runge-Kutta di ordine 4.
Per tracciare, se possibile, una soluzione con t nell'intervallo [t0 − h, t0 + h] procedere in due fasi impostando ad es. passo = −1/10 e n = 10·h e poi passo = 1/10 e n = 10·h.
Più piccolo il passo, più accurata la soluzione (e maggiore il numero n di passi).
Sistema di equazioni differenziali (autonomo o non autonomo)
x' = y
y' = x+t^2
Ad esempio: x' = y, y' = y^2 − 5y − 1/4tx + sint
Punto iniziale (per t = t0)
t0 = 0
x(t0) = −4
y(t0) = 0
Ad es. t0 = 0; x(t0) = 0; y(t0) = 1/3
Tipo di grafico
Traiettoria x(t), y(t)
t, x(t)
t, y(t)
Passo e numero dei passi
Passo = 0,01
n = 150
Ad es. per far variare t da t0 a t0 + 10 impostare passo=0,1 e n=100 oppure passo=0,01 e n=1000; per t da t0 a t0 − 5 impostare ad es. passo= −0,1 e n=50.
Punti visibili
Punto (x(t0), y(t0))
Nuovo parametro
Tabella
?
OK

E' anche possibile ottenere traiettorie "all'indietro" impostando un passo negativo. Osservate la figura seguente, qui vedete due traiettorie che passano per lo stesso punto ma per valori di *t* diversi, le equazioni sono le stesse di prima. Vediamo le impostazioni.

• Traiettoria rossa, tracciata in due fasi; t_0=3, $x(t_0)$=-4, $y(t_0)$=0, prima passo positivo 0,01 e 150 passi, poi passo negativo -0.01 e 150 passi.

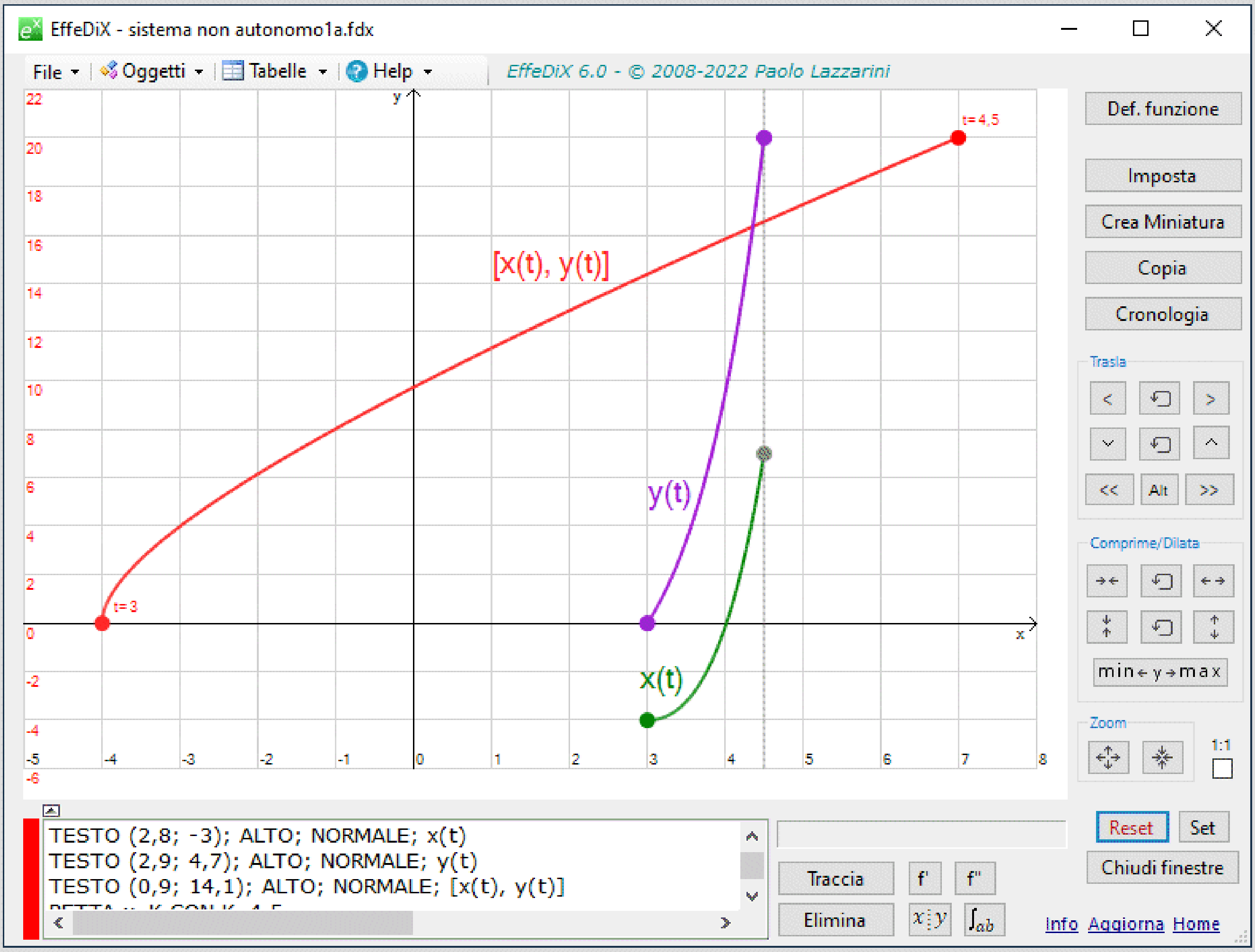
• Traiettoria blu, tracciata in due fasi; t_0=0, $x(t_0)$=-4, $y(t_0)$=0, prima passo positivo 0,01 e 150 passi, poi passo negativo -0.01 e 150 passi.

Le due traiettorie passano per lo stesso punto ma in tempi diversi se interpretiamo la variabile *t* come tempo: il teorema di unicità non è violato.



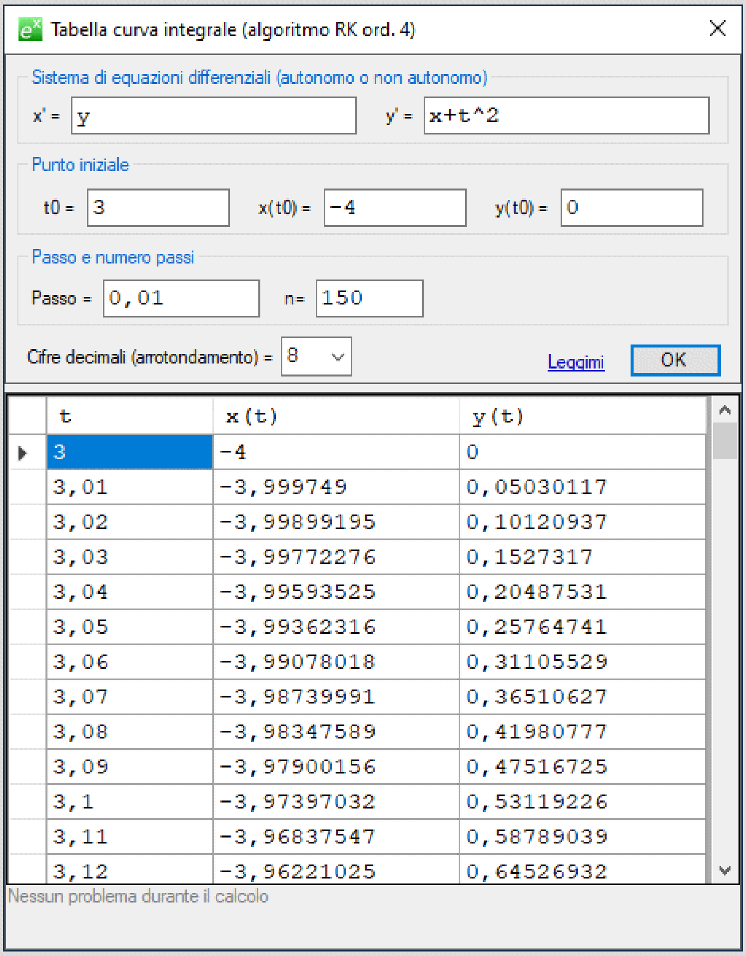
Se nella finestra di impostazione scegliete l'opzione *Tipo di grafico (t, x(t))*, otterrete il grafico della funzione x(t) al variare di *t*. Analogamente, impostando il *Tipo di grafico (t, y(t))*, otterrete il grafico della funzione y(t) al variare di *t*.

Riferiamoci di nuovo alle impostazioni della prima figura. Nella schermata seguente vedete, nello stesso piano cartesiano, in rosso il grafico della traiettoria [x(t), y(t)], in verde il grafico della componente x(t), in viola il grafico della componente y(t). In ogni caso *t* varia tra 3 e 4,5; notate che x(3)=-4, y(3)=0.



Per ottenere valori accurati per le funzioni x(t), y(t) al variare di *t*, si può generare una tabella mediante l'opzione *Tabella* che trovate in blu nella finestra di impostazione della prima figura. Nella schermata a fianco vedete la tabella relativa al solito sistema e alle condizioni iniziali della prima figura.

Facendo doppio clic su una riga della tabella viene tracciato il relativo punto [x(t), y(t)] della traiettoria; con SHIFT + doppio clic viene tracciato il punto [x(t), y(t)] e visualizzato il valore di *t*; con CTRL + doppio clic viene tracciato il vettore velocità [x'(t), y'(t)] in scala naturale, applicato in [x(t), y(t)].



t	x(t)	y(t)
3	-4	0
3,01	-3,999749	0,05030117
3,02	-3,99899195	0,10120937
3,03	-3,99772276	0,1527317
3,04	-3,99593525	0,20487531
3,05	-3,99362316	0,25764741
3,06	-3,99078018	0,31105529
3,07	-3,98739991	0,36510627
3,08	-3,98347589	0,41980777
3,09	-3,97900156	0,47516725
3,1	-3,97397032	0,53119226
3,11	-3,96837547	0,58789039
3,12	-3,96221025	0,64526932

Vedi anche:

campi vettoriali

primitiva di una funzione

equazioni differenziali del primo ordine

equazioni differenziali del secondo ordine

sistemi autonomi di equazioni differenziali

[1] Per tutte le opzioni che concernono equazioni differenziali, EffeDiX fornisce soluzioni grafico-numeriche (e non analitico-simboliche). Il motore risolutivo si basa sull'algoritmo di Runge-Kutta d'ordine 4.