Problema

Posto

$$s = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

a) calcolare la somma s per n=30

b) determinare il più piccolo intero n tale che s>30000

Somma quadrati (for next).xlsm
Somma quadrati (do loop).xlsm

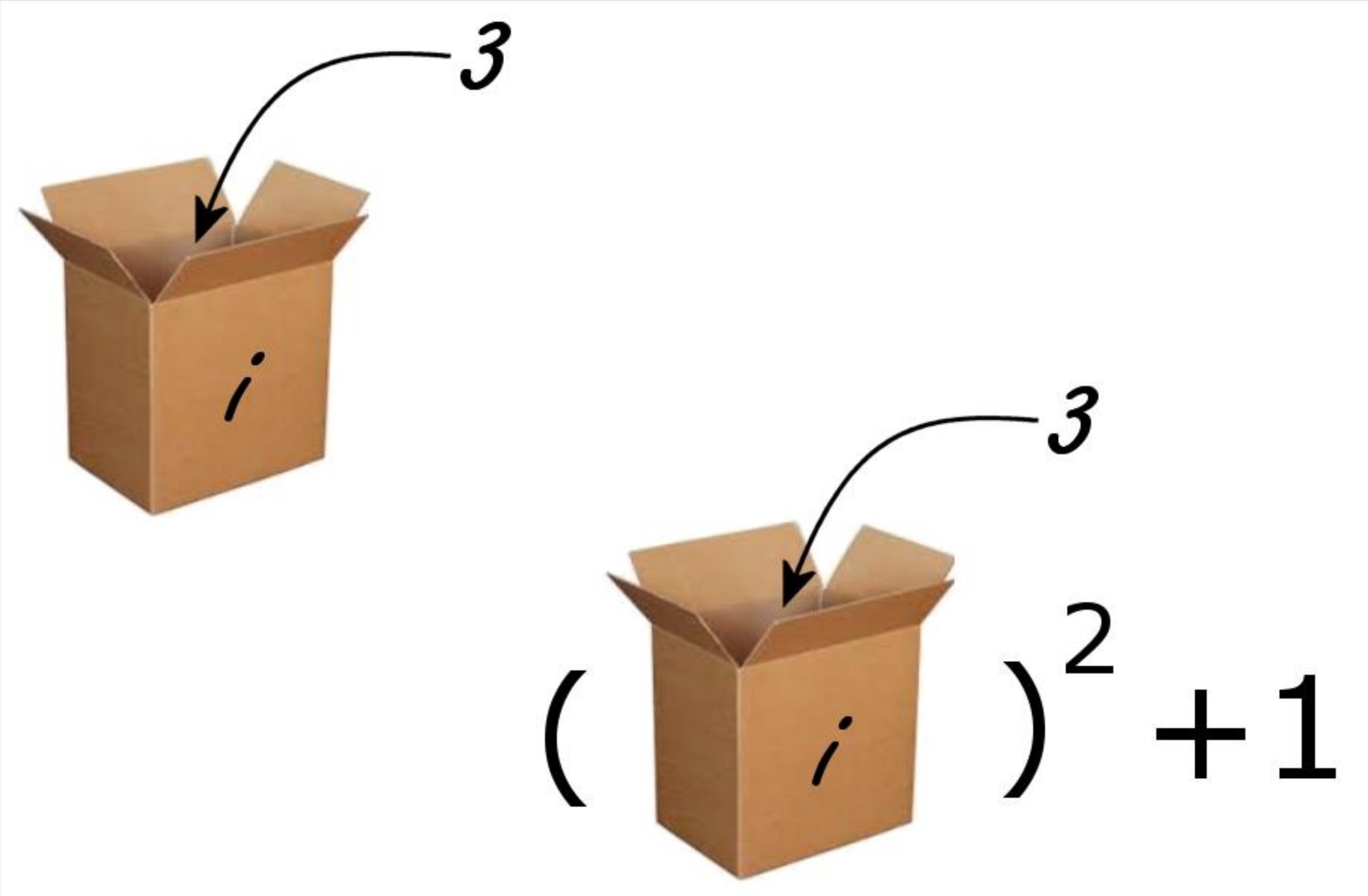
Nota La somma s, con n=30, si può anche indicare così

$$s = \sum_{i=1}^{30} i^2$$

e si legge “somma con i che va da 1 a 30 di i^2”

Variabili

Pensate a una **variabile** come a una scatolina in cui inserire un valore numerico (per ora numerico)



iterazione

Ciclo FOR

Serve a ripetere un <u>dato</u> numero *n* di volte una o più istruzioni:

```
FOR j=1 TO n
    …
    …
NEXT
```

La variabile j è un <u>contatore</u> il cui valore varia da 1 a *n*.

iterazione

Ciclo DO … LOOP

Serve a ripetere una o più istruzioni fino a quando non si verifica una certa condizione:

DO UNTIL *condizione*
…
…
LOOP

La condizione è inizialmente **falsa** e dopo un certo numero di ripetizioni deve diventare **vera**.

Generatore di numeri casuali

Il comando RND genera un numero casuale decimale con distribuzione uniforme tra 0 e 1, escludendo 1:

$$0 \leq RND < 1$$

Per ottenere un numero casuale intero, ad esempio tra 1 e 6, compresi 1 e 6, si fa così:

INT(6*RND)+1

La funzione INT è la parte intera di un numero decimale, ad esempio INT(1,71)=1, INT(3,12)=3.

Simulazione 1

SimulaDado.xlsm

Simulare il lancio di un dado equo:

a) mostrare le frequenze assolute e relative di ogni esito possibile su n lanci (n in input);

b) mostrare le probabilità di ogni esito possibile;

c) rappresentare graficamente la distribuzione di frequenze relative e la distribuzione di probabilità.

Nota

- La somma delle frequenze relative di un'intera distribuzione è sempre 1. Nel caso del dado:

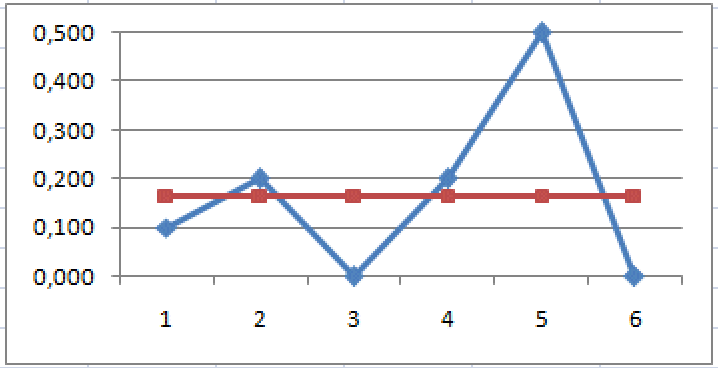
$$f_1 + f_2 + \ldots + f_6 = 1$$

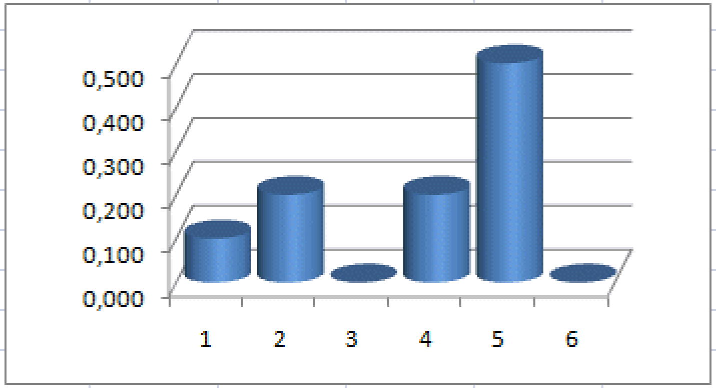
  dove f_i indica la frequenza relativa dell'esito "sul dado si presenta il numero i".

- La somma delle probabilità di un'intera distribuzione è sempre 1. Nel caso di un dado equo (distribuzione uniforme):

$$1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	#repliche	valore dado	freq. 1	freq. 2	freq. 3	freq. 4	freq. 5	freq. 6
2	10	5	1	2		2	5	
3		4	0,100	0,200	0,000	0,200	0,500	0,000
4		4	prob. 1	prob. 2	prob. 3	prob. 4	prob. 5	prob. 6
5		2	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167
6	Via	2						
7		5						
8		1						
9		5						
10		5						
11		5						

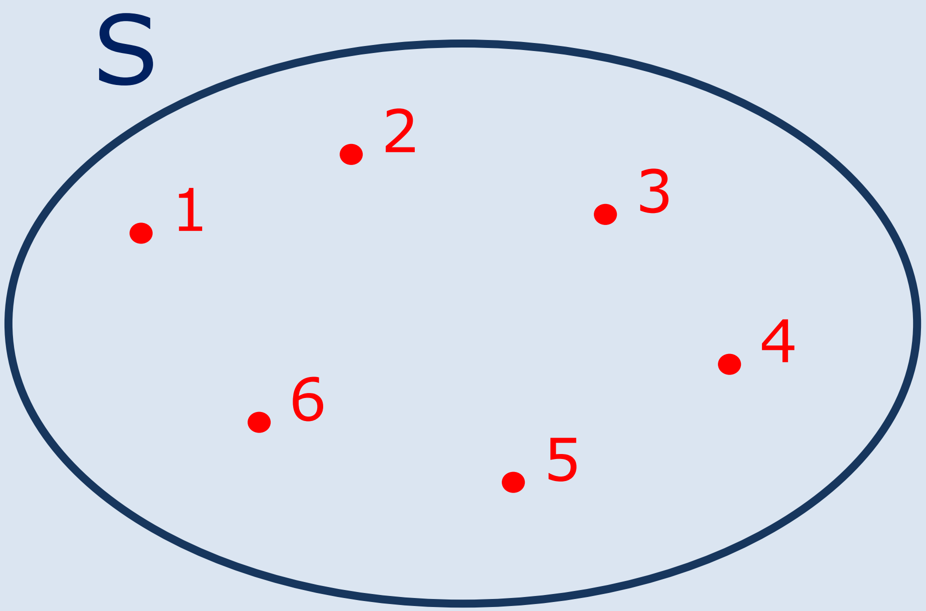





```
Option Explicit

Sub SimulaDado()
    Dim c As Integer
    Dim i, n As Long

    n = Cells(2, 1)
    Range("B2:B100001").ClearContents
    Range("C2:H3").ClearContents

    For i = 1 To n
        c = Int(6 * Rnd) + 1
        Cells(i + 1, 2) = c
        Cells(2, c + 2) = Cells(2, c + 2) + 1
    Next

    For i = 3 To 8
        Cells(3, i) = Cells(2, i) / n
    Next

    For i = 3 To 8
        Cells(5, i) = 1 / 6
    Next
End Sub
```

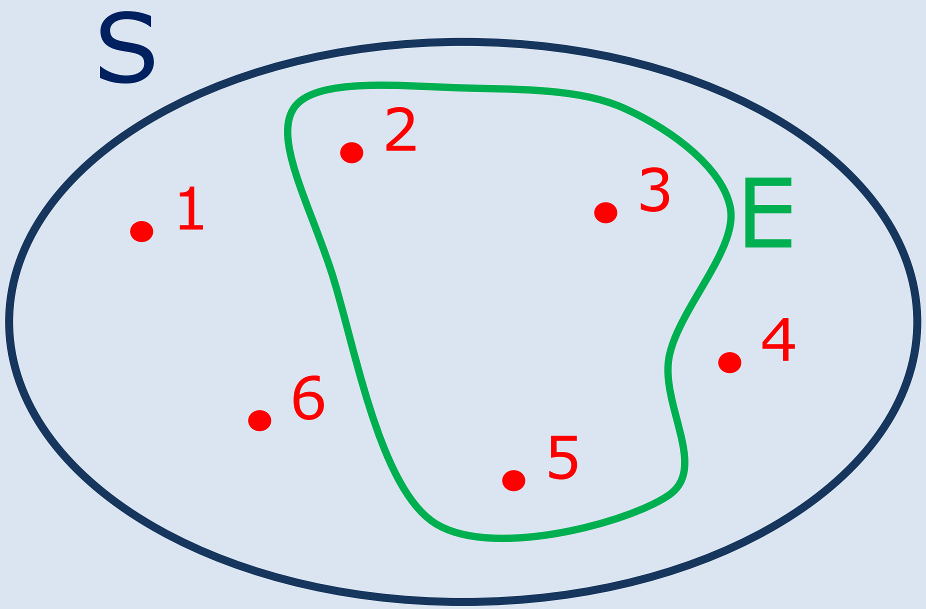
Spazio S dei risultati

(lancio di un dado)

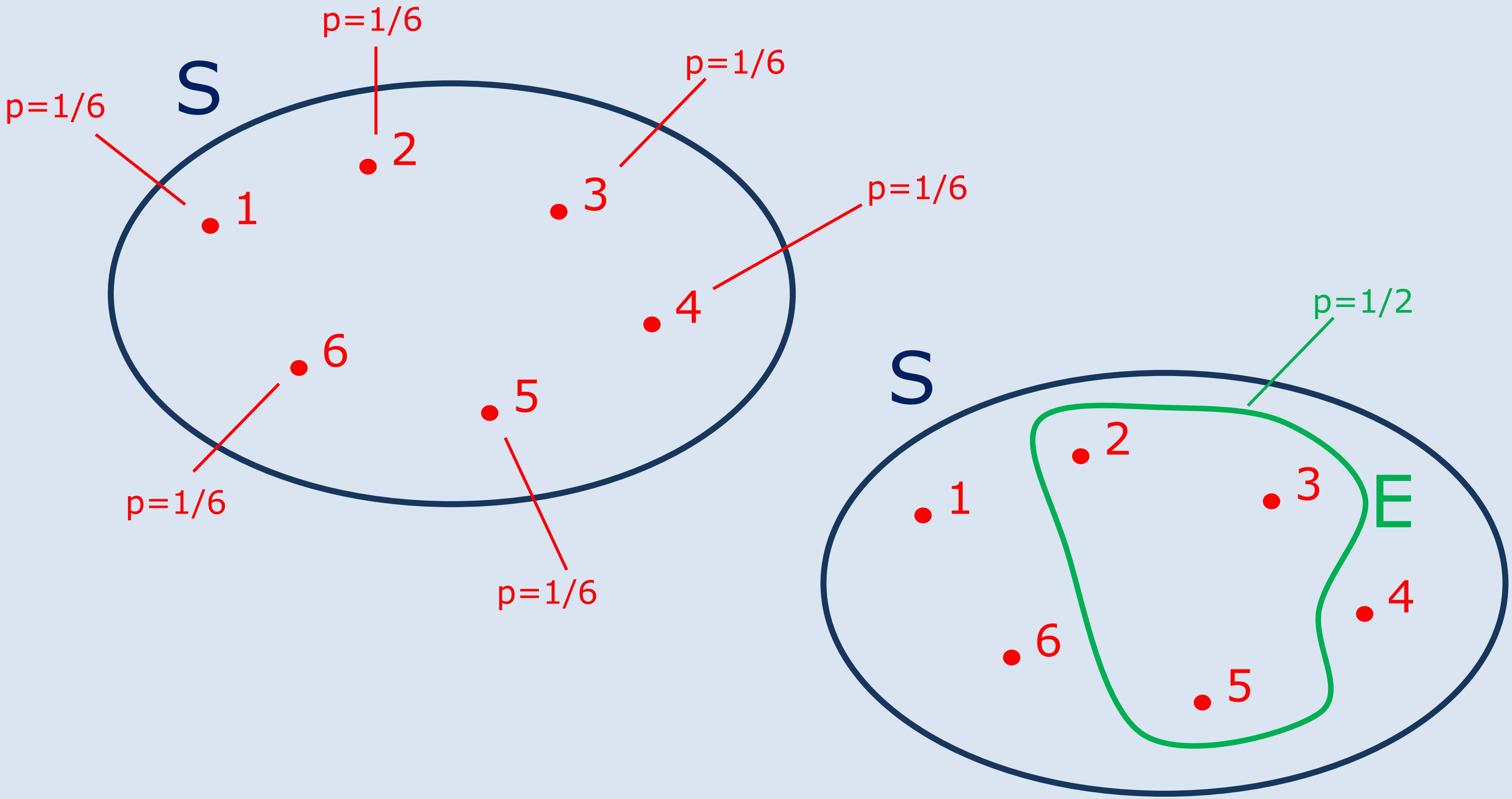


Evento

(E = ”si presenta un numero primo”)



Se il dado è <u>equo</u> ...



legge empirica del caso

(fatto rilevabile sperimentalmente)

Se un esperimento aleatorio viene replicato un gran numero di volte la distribuzione di frequenze tende alla distribuzione di probabilità:

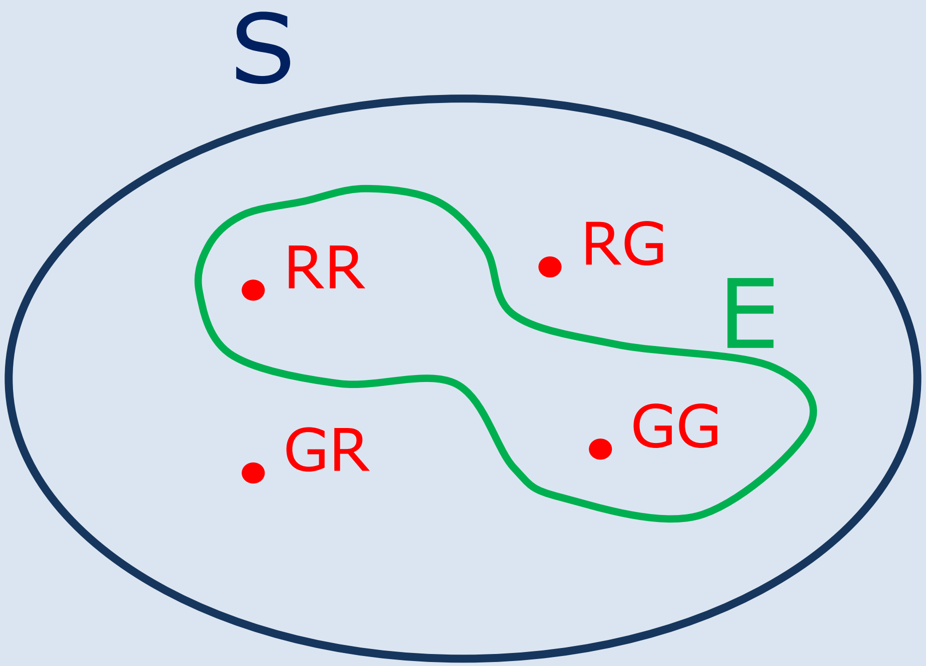
distr. frequenze

distr. probabilità

Problema dei calzini

In un cassetto ci sono 4 calzini: 2 rossi e 2 grigi. Se al buio ne pesco due, qual è la probabilità che abbiano lo stesso colore?

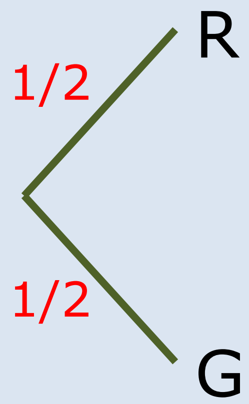
Problema dei calzini



Se questo è lo spazio dei risultati, devo concludere che la probabilità di prendere due calzini dello stesso colore è 1/2?

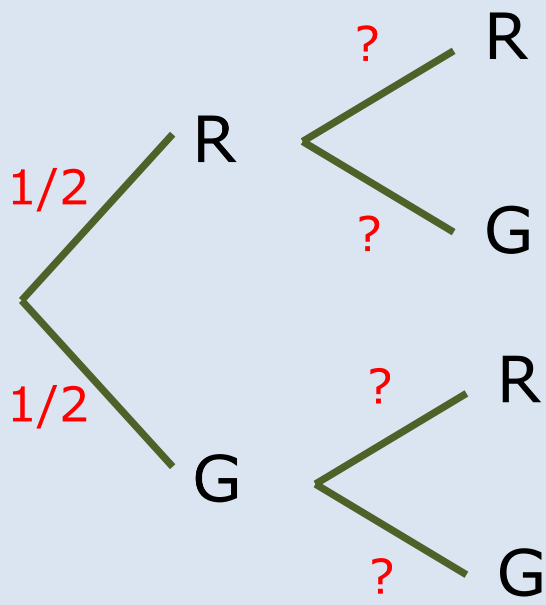
Problema dei calzini

Primo calzino

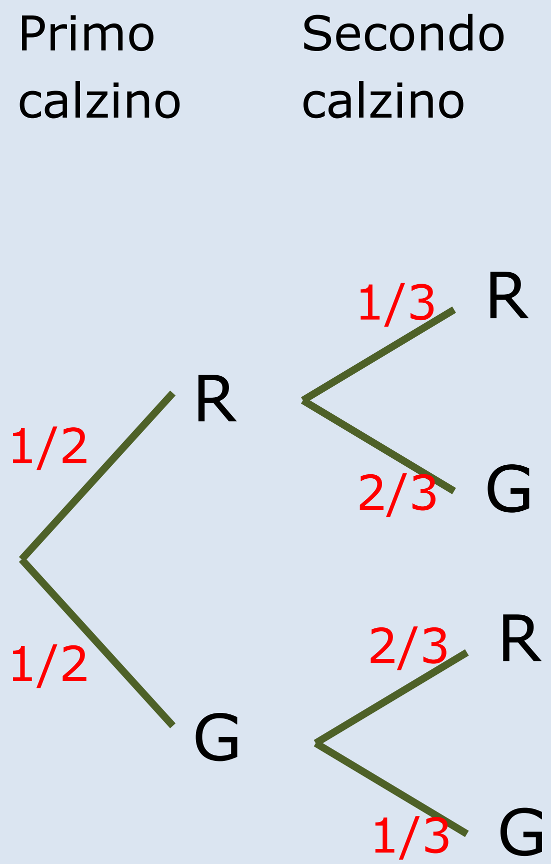


Problema dei calzini

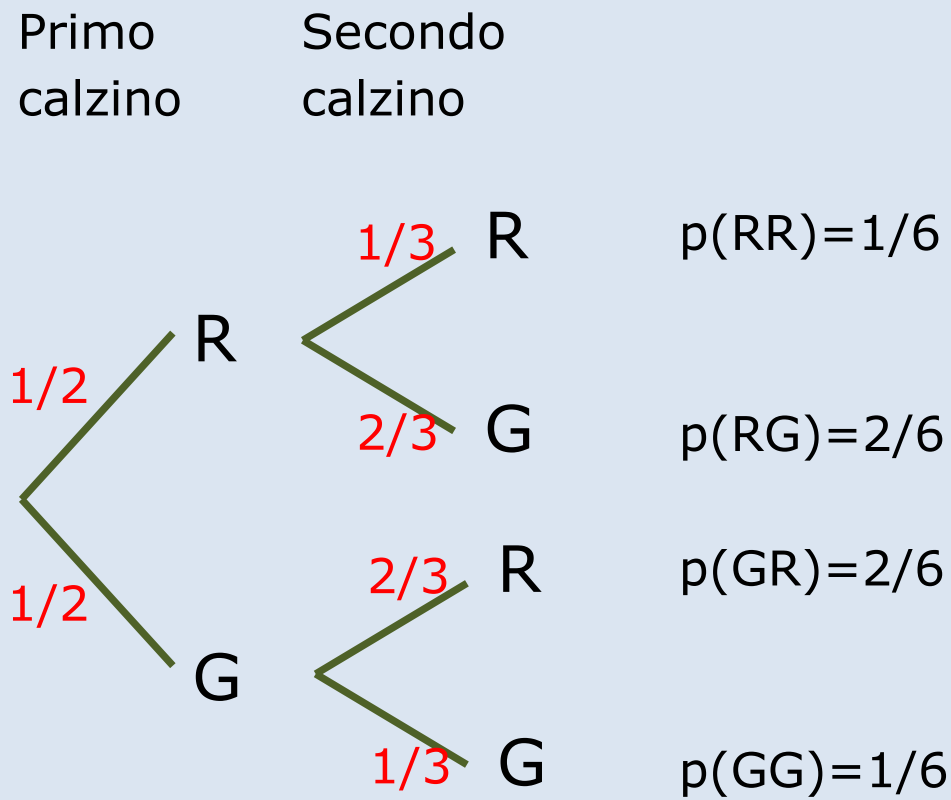
Primo calzino | Secondo calzino



Problema dei calzini



Problema dei calzini



Quindi la probabilità di avere due calzini dello stesso colore è:

$$1/6+1/6 = 2/6 = 1/3 = 0{,}3333\ldots \cong 33{,}3\%$$

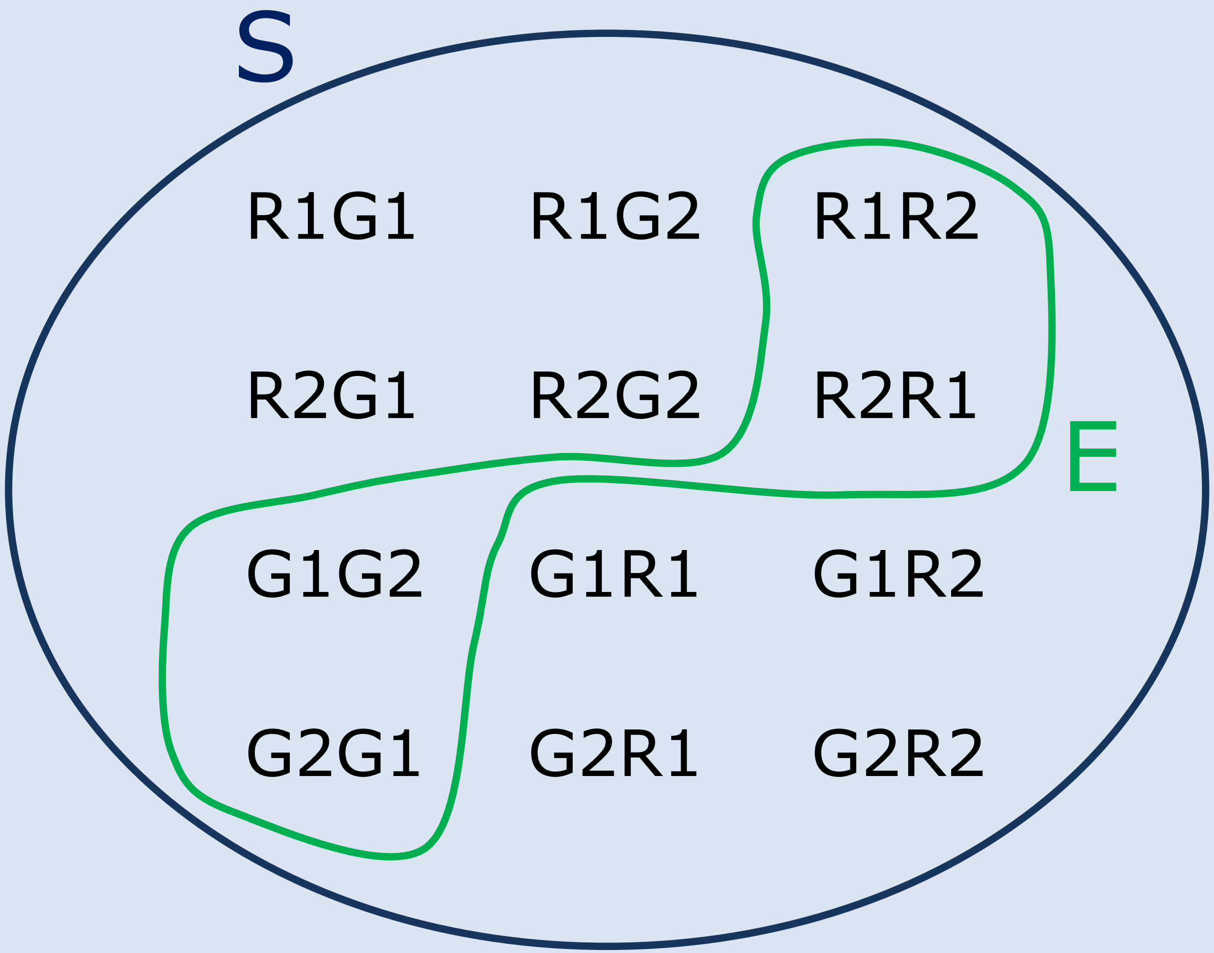
Problema dei calzini

Diamo un'etichetta a ciascun calzino:

R1, R2, G1, G2

Quante e quali sono le possibili <u>coppie</u> di calzini?

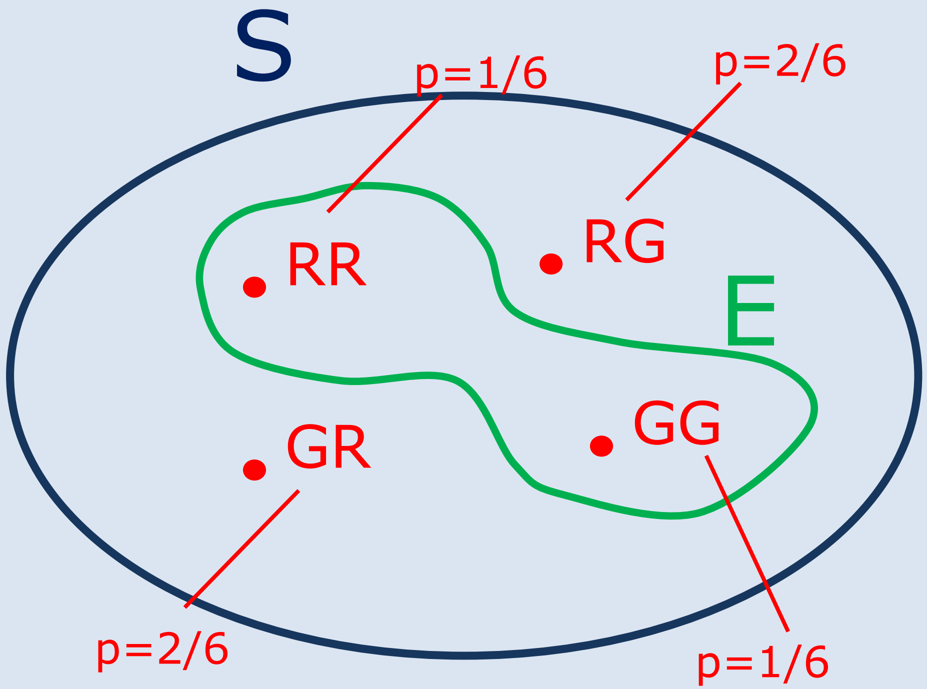
Problema dei calzini



p(E)=4/12=1/3

Questo spazio S ha una distribuzione di probabilità **uniforme**: tutti gli esiti hanno la **stessa probabilità** uguale a 1/12.

Problema dei calzini



Questo spazio S **non ha una distribuzione di probabilità uniforme**.

Probabilità condizionata

A="primo calzino rosso" B="primo calzino grigio"
C="secondo calzino rosso" D="secondo calzino grigio"

$$p(A \cap C) = p(A) \cdot \underbrace{p(C \mid A)}_{\text{probabilità condizionata}} = 1/2 \cdot \underline{1/3}$$

(la probabilità che si verifichino **sia A sia C** è uguale alla probabilità che si verifichi A per la probabilità che si verifichi **C dato A**)

$$p(A \cap D) = p(A) \cdot \underbrace{p(D \mid A)}_{\text{probabilità condizionata}} = 1/2 \cdot \underline{2/3}$$

(la probabilità che si verifichino **sia A sia D** è uguale alla probabilità che si verifichi A per la probabilità che si verifichi **D dato A**)

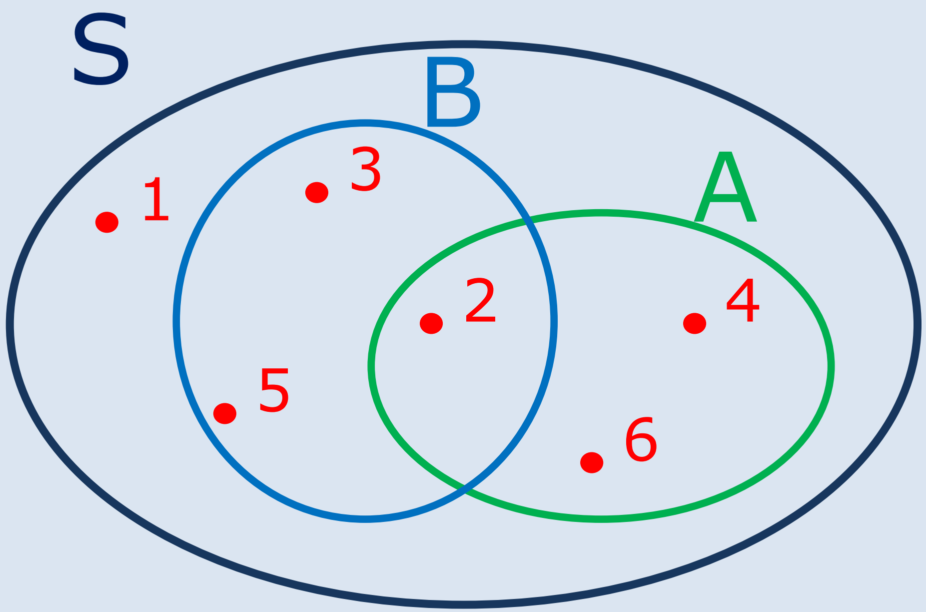
Probabilità condizionata e informazione

Lanciamo un dado equo e consideriamo i tre **eventi**:

A="si presenta un numero pari"

B="si presenta un numero primo"

$A \cap B$ ="si presenta un numero **sia** pari **sia** primo"



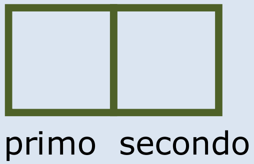
nuova informazione: so che ...

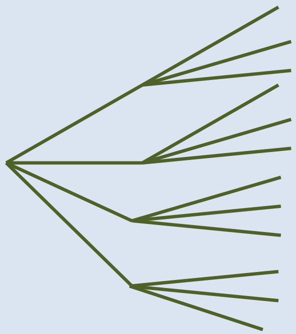
$p(B)=1/2$ ma $p(B|A)=1/3$

$p(A \cap B)=p(A) \cdot p(B|A)=1/2 \cdot 1/3=1/6$

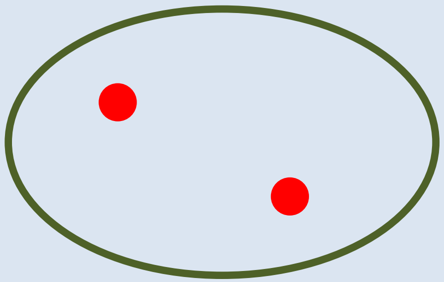
Ripensando al problema dei calzini

Se ho 4 oggetti, quante <u>coppie ordinate</u> posso formare?





Se ho 4 oggetti, quanti <u>insiemi di due elementi</u> posso formare?



Se ho 10 oggetti, quante coppie ordinate posso formare?

Se ho 10 oggetti, quanti insiemi di due elementi posso formare?

Se ho 10 oggetti, quante terne ordinate posso formare?

Se ho 10 oggetti, quanti insiemi di tre elementi posso formare?

Simulazione del problema dei calzini

	A	B	C	D	E	F
1	#prove	Primo calzino	Cassetto	Secondo calzino	Stesso colore	Frequenza rel. "stesso colore"
2	10	N	BBN	N	VERO	0,3
3		N	BBN	N	VERO	
4	Via	B	BNN	N	FALSO	
5		N	BBN	B	FALSO	
6		N	BBN	B	FALSO	
7		N	BBN	B	FALSO	
8		B	BNN	N	FALSO	
9		B	BNN	B	VERO	
10		B	BNN	N	FALSO	
11		B	BNN	N	FALSO	
12						

```
Sub simula()
    Dim i, n, cont As Long
    Dim cassetto, PrimoCalzino, SecondoCalzino As String
    Dim c As Integer
    Dim StessoColore As Boolean

    Range("B2:E100001").ClearContents
    Range("F2").ClearContents
    n = Cells(2, 1)
    cont = 0

    n = Cells(2, 1)
    For i = 1 To n
        cassetto = "RRGG"
        c = Int(4 * Rnd) + 1
        PrimoCalzino = Mid(cassetto, c, 1)
        Cells(i + 1, 2) = PrimoCalzino

        cassetto = Mid(cassetto, 1, c - 1) + Mid(cassetto, c + 1)
        Cells(i + 1, 3) = cassetto

        c = Int(3 * Rnd) + 1
        SecondoCalzino = Mid(cassetto, c, 1)
        Cells(i + 1, 4) = SecondoCalzino

        StessoColore = False
        If PrimoCalzino = SecondoCalzino Then
            StessoColore = True
            cont = cont + 1
        End If

        Cells(i + 1, 5) = StessoColore
    Next
    Cells(2, 6) = cont / n
End Sub
```

Comando MID

A cosa serve:

serve ad estrarre una sottostringa da una stringa

Sintassi:

MID(stringa, primo elemento, numero elementi)

Esempio 1 MID("marco", 2, 3) da in output la stringa "arc"

Esempio 2 MID("fabio", 1, 5) da in output la stringa "fabio"

Esempio 3 MID("andrea", 3, 1) da in output la stringa "d"

Esempio 4 MID("annalisa", 5) da in output la stringa "lisa"

Considera questo codice:

```
sub ProvaComandoMid
    dim i as integer
    for i=1 to 5
        cells(i, 1) = mid(“janos”, i, 1)
    next
end sub
```

Qual è l’output?

Comando IF … THEN …

A cosa serve:

serve ad eseguire uno più comandi <u>su condizione</u>

Sintassi:

```
IF condizione THEN
    comando
    comando
    …
END IF
```

<u>Esempio di condizioni</u>

n=1

n>=1

s = “paolo”

cells(1,1) = “paolo” **OR** cells(1,1)= “fabio”

Cosa succede se il numero dei calzini aumenta? Ad esempio se ho 4 calzini rossi e 4 calzini grigi?

Tre ipotesi:

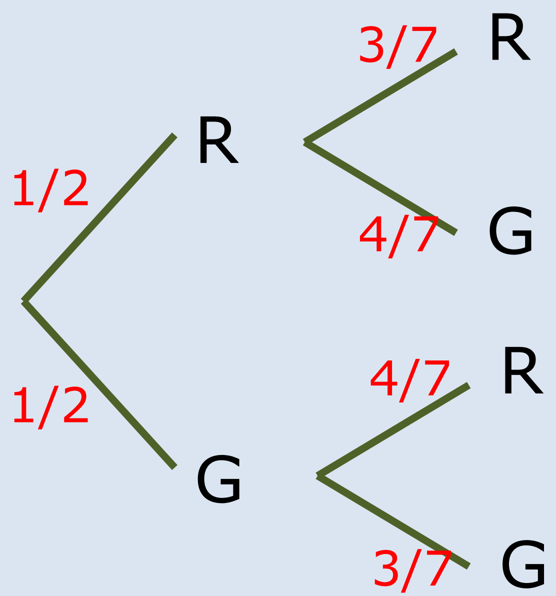
a) non cambia nulla, la probabilità di avere due calzini dello stesso colore rimane sempre la stessa cioè è sempre 1/3;

b) la probabilità di avere due calzini dello stesso colore <u>aumenta</u> (rispetto a 1/3);

c) la probabilità di avere due calzini dello stesso colore <u>diminuisce</u> (rispetto a 1/3).

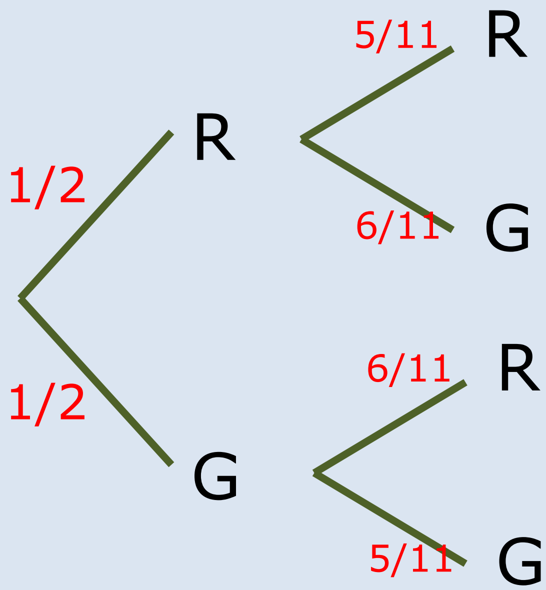
Procediamo così: calcoliamo mediante il solito diagramma ad albero la probabilità nel caso di 4, 8, 12, 16 calzini e <u>speriamo</u> di individuare una legge (una formula).

8 calzini



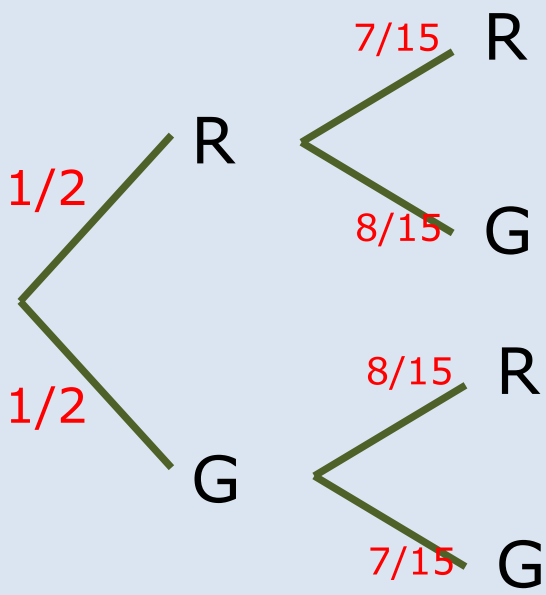
p("due calzini dello stesso colore") =
3/14+3/14 = 6/14 = **3/7**

12 calzini



p("due calzini dello stesso colore") =
5/22+5/22 = 10/22 = **5/11**

16 calzini



p(“due calzini dello stesso colore”) =

7/30+7/30 = 14/30 = **7/15**

Ecco le probabilità trovate:

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{3}{7}, \quad \frac{5}{11}, \quad \frac{7}{15}$$

Mi aspetto che la successione continui così:

… … …

Qual è la formula che rappresenta al variare di un parametro n la nostra successione (a partire da n=1)?

In questo caso è facile trovare la formula:

p("due calzini dello stesso colore con 4n calzini nel cassetto") = $\dfrac{2n-1}{4n-1}$

Quando n cresce cosa succede alla frazione:

$$\frac{2n-1}{4n-1} \ ?$$

Quando n è <u>molto grande</u> si ha

$$\frac{2n-1}{4n-1} \approx \frac{2n}{4n} = \frac{1}{2}$$

Ad esempio per n=1000

$$\frac{2\cdot 1000-1}{4\cdot 1000-1} \approx 0{,}49987$$

Ad esempio per n=1000000

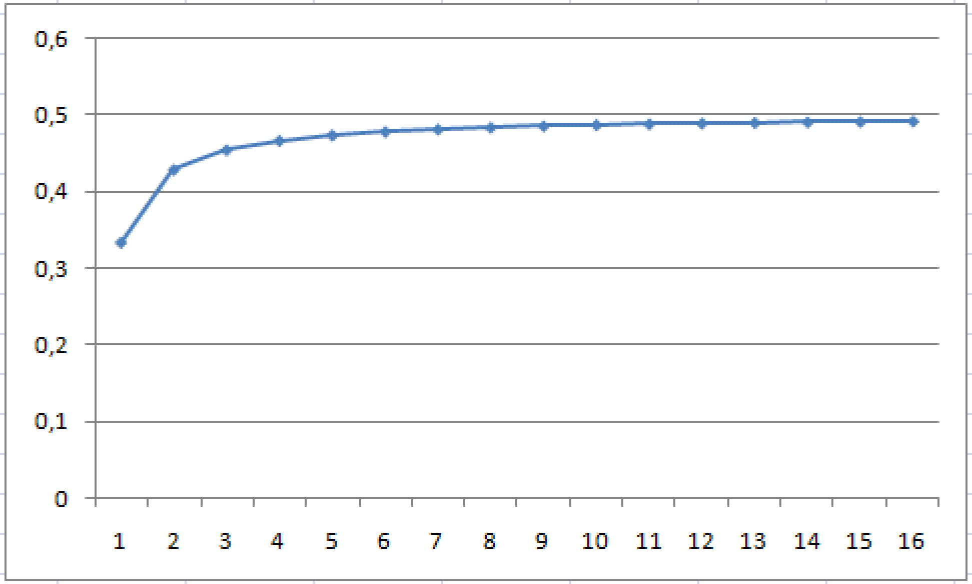
$$\frac{2\cdot 1000000-1}{4\cdot 1000000-1} \approx 0.49999987$$

Più formalmente

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{4n-1} = \frac{1}{2}$$

B1 =(2*A1-1)/(4*A1-1)

	A	B
1	1	0,333333
2	2	0,428571
3	3	0,454545
4	4	0,466667
5	5	0,473684
6	6	0,478261
7	7	0,481481
8	8	0,483871
9	9	0,485714
10	10	0,487179
11	11	0,488372
12	12	0,489362
13	13	0,490196
14	14	0,490909
15	15	0,491525
16	16	0,492063



	A	B	C	D	E	F
1	#prove	Primo calzino	Cassetto	Secondo calzino	Stesso colore	Frequenza rel. "stesso colore"
2	5000	G	RRRRRRRRGGGGGGG	G	VERO	0,4812
3	#calzini	G	RRRRRRRRGGGGGGG	R	FALSO	
4	16	R	RRRRRRRGGGGGGGG	G	FALSO	
5		R	RRRRRRRGGGGGGGG	G	FALSO	
6		G	RRRRRRRRGGGGGGG	G	VERO	
7		R	RRRRRRRGGGGGGGG	R	VERO	
8	Via	G	RRRRRRRRGGGGGGG	G	VERO	
9		R	RRRRRRRGGGGGGGG	G	FALSO	
10		G	RRRRRRRRGGGGGGG	R	FALSO	
11		G	RRRRRRRRGGGGGGG	R	FALSO	
12		G	RRRRRRRRGGGGGGG	G	VERO	

```
Sub simula()
    Dim i, n, cont As Long
    Dim cassetto, PrimoCalzino, SecondoCalzino As String
    Dim c, NCalz As Integer
    Dim StessoColore As Boolean

    Range("B2:E100001").ClearContents
    Range("F2").ClearContents

    n = Cells(2, 1)
    NCalz = Cells(4, 1)
    cont = 0

    n = Cells(2, 1)
    For i = 1 To n

        cassetto = String(NCalz / 2, 82) + String(NCalz / 2, 71)
        c = Int(NCalz * Rnd) + 1
        PrimoCalzino = Mid(cassetto, c, 1)
        Cells(i + 1, 2) = PrimoCalzino

        cassetto = Mid(cassetto, 1, c - 1) + Mid(cassetto, c + 1)
        Cells(i + 1, 3) = cassetto

        c = Int((NCalz - 1) * Rnd) + 1
        SecondoCalzino = Mid(cassetto, c, 1)
        Cells(i + 1, 4) = SecondoCalzino

        StessoColore = False
        If PrimoCalzino = SecondoCalzino Then
            StessoColore = True
            cont = cont + 1
        End If

        Cells(i + 1, 5) = StessoColore
    Next
    Cells(2, 6) = cont / n
End Sub
```

Considerate il seguente problema:

Se lancio tre dadi <u>*equi*</u>*, qual è la probabilità di ottenere per somma 12? In generale qual è la probabilità di ottenere per somma il valore n (con* $3 \leq n \leq 18$*)?*

Realizzare una simulazione ponendo in input il numero di repliche dell'esperimento e il valore di n.

Se lancio un dado, di cui non so nulla, qual è la probabilità che si presenti il numero 6?

questo **non** è un problema di calcolo delle probabilità

Se lancio tre volte uno stesso dado equo, qual è la probabilità che si presentino almeno due 6?

questo è un problema di calcolo delle probabilità

Assiomi di Kolmogorov (1933)

Sia S uno **spazio di risultati** o spazio campione o spazio campionario cioè l'insieme di tutti i possibili risultati di un esperimento aleatorio (una volta eseguito l'esperimento si verifica **uno e uno solo** dei risultati dell'insieme S).

Se S è **discreto**, cioè finito oppure infinito numerabile, possiamo considerare **ogni** sottoinsieme di S come un **evento**.

Se S ha la **potenza del continuo**, ad esempio se S coincide con l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, solo **alcuni** sottoinsiemi di S corrispondono ad eventi, li chiameremo sottoinsiemi **misurabili**. Ad esempio, se $S=\mathbb{R}$, possiamo considerare come sottoinsiemi misurabili tutti gli intervalli, di qualsiasi tipo, più tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che si ottengono mediante unione, intersezione e complementare di intervalli (la richiesta è comprensibile perché unione, intersezione e complementare sono operazioni logiche sugli eventi a cui non possiamo rinunciare).

Diremo che una funzione p che associa ad ogni **evento** E un numero reale è una funzione di probabilità (o misura di probabilità) se:

<u>Assioma 1</u> $p(E) \geq 0$ per ogni evento E

<u>Assioma 2</u> $p(S) = 1$, $p(\emptyset) = 0$

<u>Assioma 3</u> Se E_1 ed E_2 sono eventi **disgiunti** (incompatibili) allora $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$

(l'assioma viene esteso ad una unione numerabile di eventi incompatibili a coppie)

Andrej Nikolaevič Kolmogorov

Tambov, 1903 – Mosca, 1987