

Bacino di attrazione di un punto fisso

Sia R un sottoinsieme di punti del piano, $F(x, y)$ una mappa di R in R e (x^*, y^*) un punto fisso della mappa. Il *bacino di attrazione* del punto fisso (x^*, y^*) è l'insieme di tutti i punti iniziali $(x_0, y_0) \in R$ tali che, iterando la mappa F , l'orbita di (x_0, y_0) converga al punto fisso cioè, indicando con (x_n, y_n) l' n -esima iterazione, la distanza del punto (x_n, y_n) da (x^*, y^*) tenda a 0 per n che tende a $+\infty$. Se il punto fisso è attrattivo (asintoticamente stabile) il bacino di attrazione contiene necessariamente un intorno del punto fisso.

EffeDiX può **approssimare** il bacino di attrazione di un punto fisso. L'algoritmo utilizzato è il seguente: si considera una griglia rettangolare di punti di R e per ogni punto (x_0, y_0) della griglia si considerano al più n iterazioni della mappa F ; se la distanza dell'iterazione (x_i, y_i) , con $0 \leq i \leq n$, dal punto fisso (x^*, y^*) diventa minore di una data soglia d si considera (x_0, y_0) appartenente al bacino (al primo i per cui ciò avviene, senza considerare ulteriori iterazioni) altrimenti si considera non appartenente.

L'opzione *Bacino d'attrazione* la trovate nel menu *Oggetti grafici* di EffeDiX.

Esempio 1

Considerare la mappa

$$F(x, y) = (xy, x^2 - y^2)$$

- 1) Tracciare il bacino d'attrazione di $(0, 0)$, unico punto fisso della mappa (è un punto fisso attrattivo).
- 2) Scegliere un punto a caso interno al bacino e uno esterno. Verificare che nel primo caso l'orbita del punto converge all'origine mentre nel secondo non converge.
- 3) Zoomando più volte sul bordo del bacino verificarne la sua natura frattale.

Le figure seguenti mostrano le finestre d'impostazione per il bacino d'attrazione e per l'orbita di punto iniziale $A=(1,2; 1,4)$, esterno al bacino.

Bacino di attrazione punto fisso mappa 2D

Insieme dei punti (x, y) della regione R del piano che sono attratti dal punto fisso (x^*, y^*) sotto iterazione della mappa $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$.
La regione R è un rettangolo che comprende il suo bordo. L'algoritmo considera un punto come "attratto" se sotto al più n iterazioni della mappa è portato a una distanza dal punto fisso minore di una soglia d .
Per la dimensione dei punti tracciati: pulsante "Imposta".

Funzione iterata: $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

$f(x, y) = xy$

$g(x, y) = x^2 - y^2$

Punto fisso per la mappa

$x^* = 0$

$y^* = 0$

Numero max n di iterazioni e distanza soglia d

$n = 10$

$d = 0,01$

Regione rettangolare R individuata da $x_1 \leq x \leq x_2$ e $y_1 \leq y \leq y_2$

$x_1 = -4$ $x_2 = 4$ $y_1 = -4$ $y_2 = 4$

Num. intervalli = 150

[Imposta l'attuale regione di piano visualizzata](#)

[Traccia il bordo della regione R](#)

[Guida](#) ESC per interrompere OK

Orbita discreta 2D

Orbita:
 (x_0, y_0)
 $(x_1 = f(x_0, y_0), y_1 = g(x_0, y_0))$
 $(x_2 = f(x_1, y_1), y_2 = g(x_1, y_1))$
 ...

Funzione di R^2 in R^2 iterata: $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

$f(x, y) = xy$

$g(x, y) = x^2 - y^2$

Punto iniziale

$x_0 = 1,2$

$y_0 = 1,4$

Numero iterazioni

$n = 10$

Tipo di grafico

☒ Orbita (x_i, y_i) ☐ (i, x_i) ☐ (i, y_i) $i=0, 1, \dots, n$

☐ Traccia solo i punti ☐ Punti piccoli

[Nuovo parametro](#) [Matrice jacobiana](#) [Tabella](#) [Guida](#) OK

Qui di seguito vedete il risultato. Per tracciare la seconda orbita di punto iniziale $B=(0,2; 0,8)$, interno al bacino, basta cambiare i valori nella seconda finestra d'impostazione; per generare le due tabelle delle figure seguenti utilizzate l'opzione "Tabella" presente nella stessa finestra d'impostazione dell'orbita.

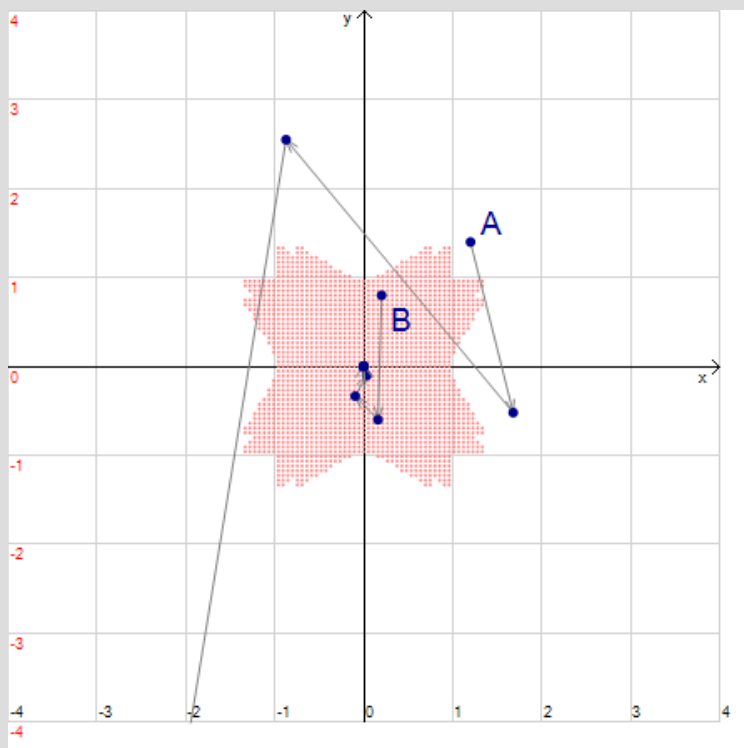


Tabella orbita discreta 2D

Funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ iterata: $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

$f(x, y) = xy$

$g(x, y) = x^2 - y^2$

Punto iniziale

$x_0 = 1,2$ $y_0 = 1,4$

Numero iterazioni: $n = 10$ Cifre decimali (arrotondamento) = 6

[Leggimi](#) [OK](#)

i	x(i)	y(i)
0	1,2	1,4
1	1,68	-0,52
2	-0,8736	2,552
3	-2,229427	-5,749527
4	12,818152	-28,086716
5	-360,019788	-624,55857
6	224853,444112	-260459,159602
7	-5856513908...	-1727990249...
8	10119998928...	31312804861...
9	31688555164...	-8780773699...
10	-2782500317...	-6706034148...

Tabella orbita discreta 2D

Funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ iterata: $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

$f(x, y) = xy$

$g(x, y) = x^2 - y^2$

Punto iniziale

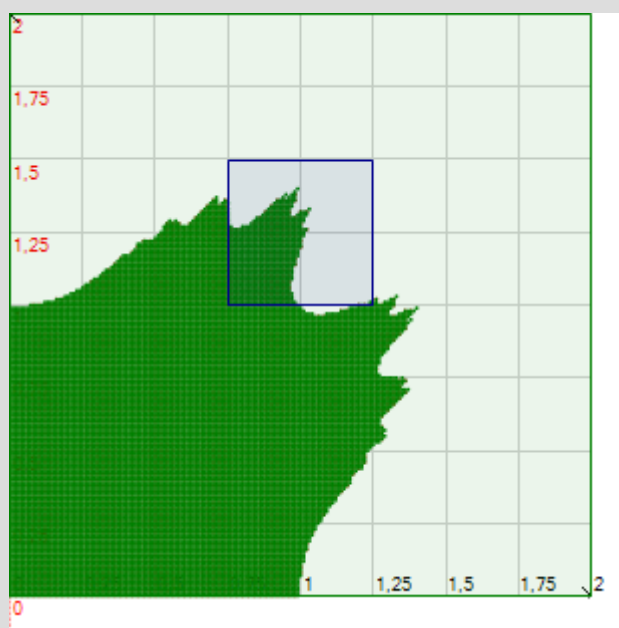
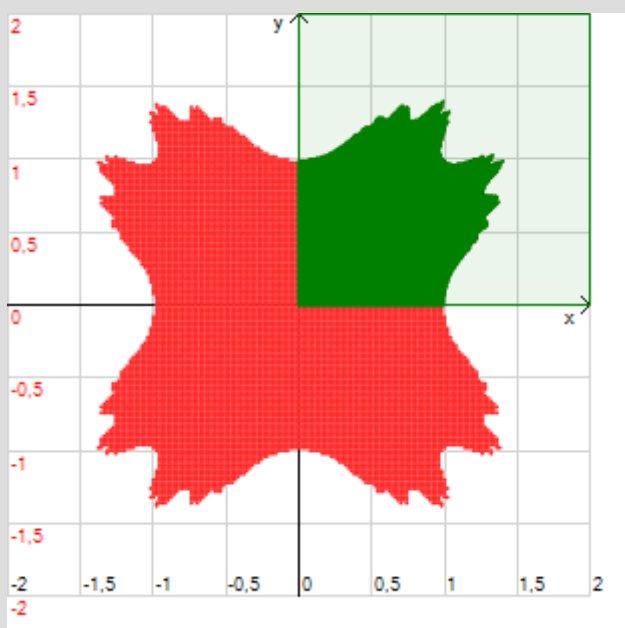
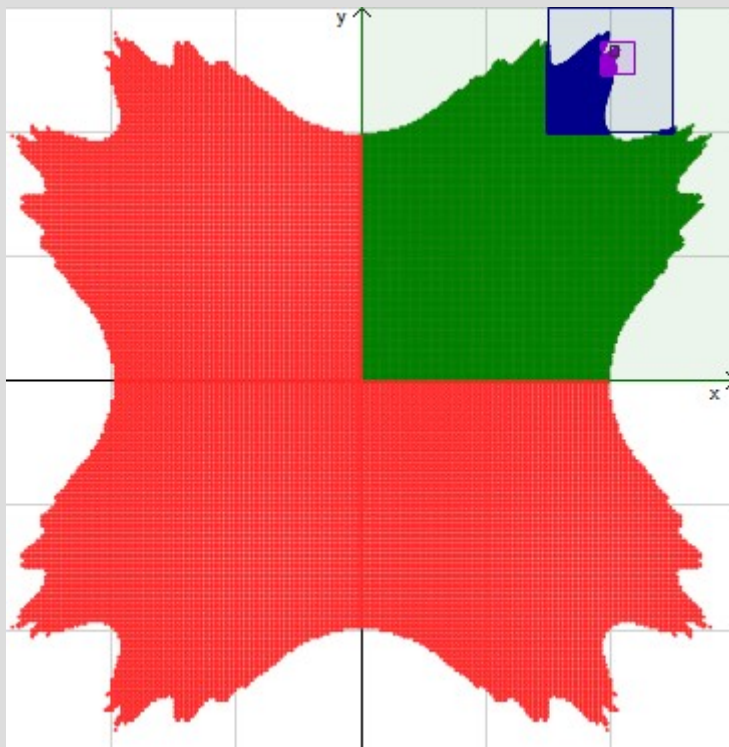
$x_0 = 0,2$ $y_0 = 0,8$

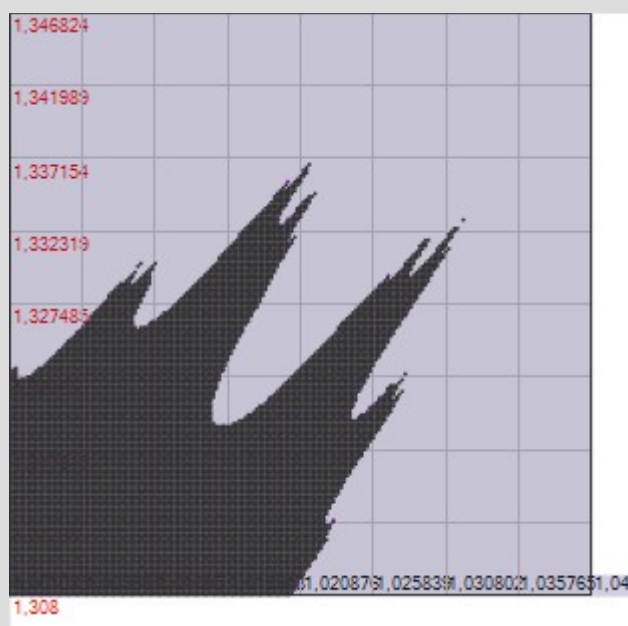
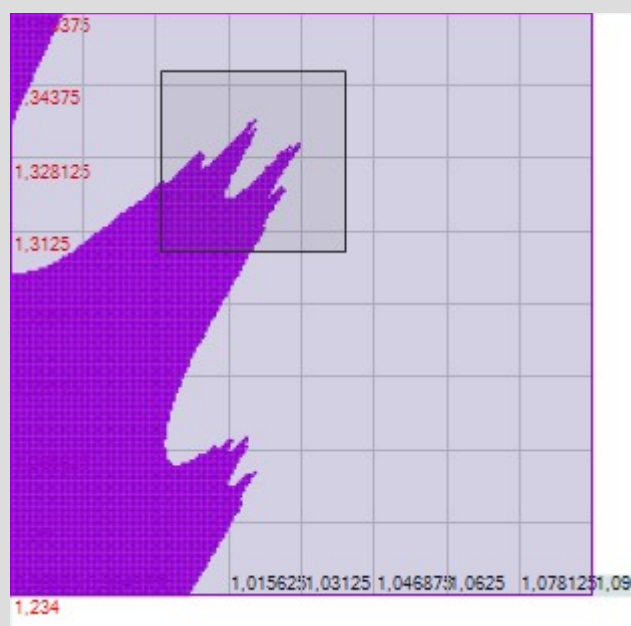
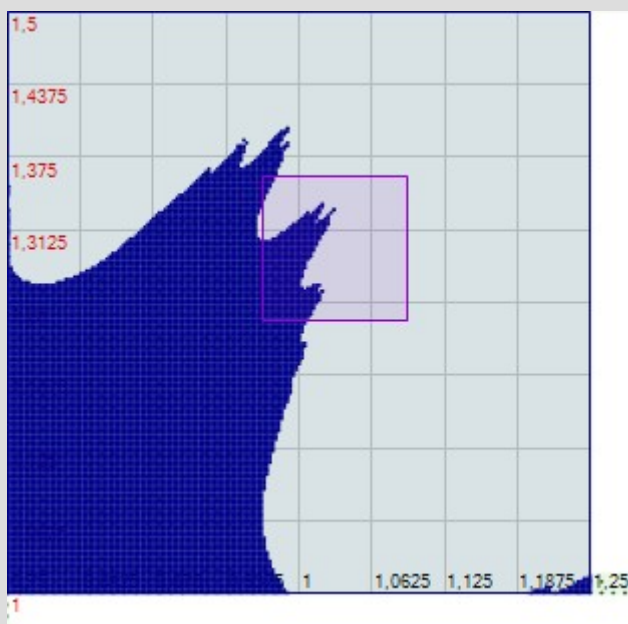
Numero iterazioni: $n = 10$ Cifre decimali (arrotondamento) = 4

[Leggimi](#) [OK](#)

i	x(i)	y(i)
0	0,2	0,8
1	0,16	-0,6
2	-0,096	-0,3344
3	0,0321	-0,1026
4	-0,0033	-0,0095
5	0	-0,0001
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

La figura a fianco e quelle seguenti mostrano il bacino iniziale (con una risoluzione di 200 intervalli) e delle successive zoomate sul suo **bordo** (tutte con la risoluzione di 200 intervalli). Notare il motivo ripetitivo delle “punte” (autosomiglianza) che mostrano la complessità del bordo e ne suggeriscono la natura frattale.





Come effettuare le zoomate su una regione già tracciata:

1. ritagliare una regione rettangolare tenendo premuto il pulsante destro del mouse;
2. fare click nella finestra di impostazione sul link "Imposta l'attuale regione di piano visualizzata";
3. volendo, fare click sul link "Traccia il bordo della regione R"
4. fare click su "ok"

Esempio 2

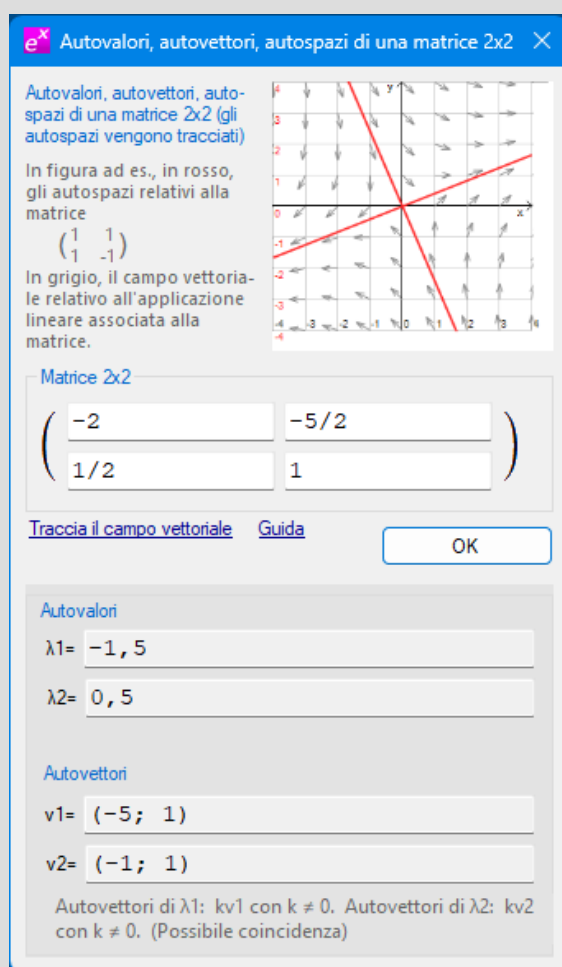
Data la mappa **lineare**

$$F(x, y) = (-2x - 5/2y, x/2 + y)$$

tracciare il bacino d'attrazione di $(0, 0)$, unico punto fisso della mappa (è un punto di sella).

I due autovalori della matrice dei coefficienti sono reali, distinti, con modulo in un caso maggiore di 1, nell'altro minore di 1 (vedi figura seguente). In questa situazione il punto fisso è una **sella**, le uniche orbite che tendono al punto fisso sono quelle con punto iniziale appartenente all'autospazio relativo all'autovalore λ_2 di modulo minore di 1, tutte le altre sono divergenti. Quindi il bacino d'attrazione è la retta per l'origine (autospazio) con la stessa direzione dell'autovettore $v_2 = (-1, 1)$.

Vedi anche l'esempio 3 della seconda parte della guida all'opzione *Calcolo - Autovalori, autovettori, autospazi matrice 2x2*.



Le figure seguenti mostrano la finestra d'impostazione per tracciare il bacino d'attrazione e il risultato (che conferma quanto detto).

