

## Bacino di attrazione di un punto di equilibrio per un sistema di equazioni differenziali

Sia  $R$  un sottoinsieme di punti del piano e sia  $(x^*, y^*)$  un punto di equilibrio **attraattivo** del sistema autonomo di equazioni differenziali

$$\begin{aligned}x'(t) &= f(x, y) \\ y'(t) &= g(x, y)\end{aligned}$$

Il *bacino di attrazione* (relativo alla regione  $R$ ) del punto di equilibrio  $(x^*, y^*)$  è l'insieme di tutte le condizioni iniziali  $(x_0, y_0) \in R$  tali che la soluzione  $(x(t), y(t))$  del sistema tenda a  $(x^*, y^*)$  per  $t$  che tende a  $+\infty$ .

EffeDiX può **approssimare** il bacino di attrazione di un punto di equilibrio. L'algoritmo utilizzato è il seguente:

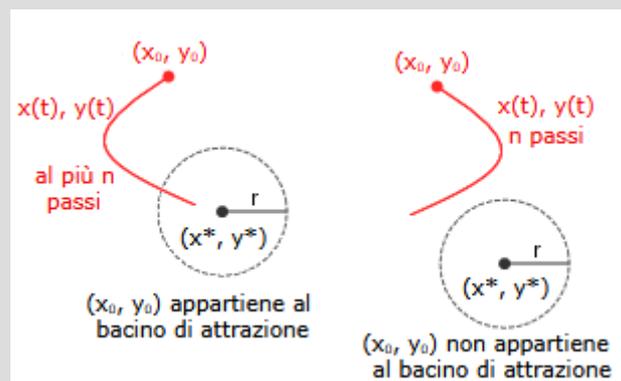
1) Si considera una griglia rettangolare di punti di  $R$  e per ogni punto  $(x_0, y_0)$  della griglia si considera la soluzione numerica  $(x(t), y(t))$  di punto iniziale  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$  valutata mediante l'algoritmo di Runge-Kutta d'ordine 4.

2) A partire da  $t=0$  e con passo  $\Delta t$  ( $\Delta t$  impostabile) si considerano **al più**  $n$  punti ( $n$  impostabile) della soluzione cioè i punti

$$(x_i = x(i \Delta t), y_i = y(i \Delta t)) \text{ con } i=0, 1, \dots, k \text{ e } k \leq n$$

Se la distanza del punto  $(x_i, y_i)$  dal punto  $(x^*, y^*)$  diventa minore di una distanza soglia  $r$  ( $r$  impostabile), al primo valore di  $i$  per cui ciò accade con  $i \leq n$ , si considera  $(x_0, y_0)$  appartenente al bacino altrimenti si considera non appartenente.

3) Per velocizzare la procedura, l'algoritmo interrompe il calcolo non appena la distanza del punto  $(x_i, y_i)$  dal punto  $(x^*, y^*)$  superi una certa soglia  $d$  (impostabile) e considera il punto  $(x_0, y_0)$  non appartenente al bacino.



L'opzione *Bacino d'attrazione punto di equilibrio sistema equazioni differenziali* la trovate nel menu *Calcolo* di EffeDiX oppure nel menu *Oggetti grafici – Curva integrale*.

### Esempio 1

Studiare, nel primo quadrante, il sistema autonomo non lineare (di tipo Volterra-Lotka)

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(3-x-2y) \\ y'(t) &= y(2-x-y)\end{aligned}$$

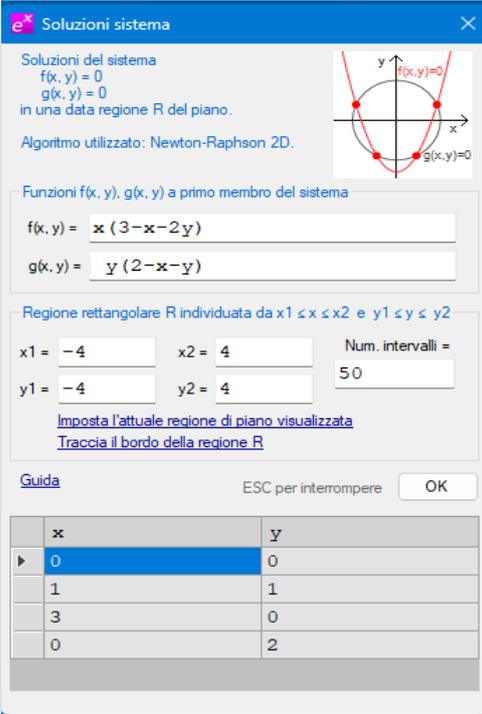
## Punti di equilibrio

Risolviamo il sistema

$$\begin{aligned} x(3-x-2y) &= 0 \\ y(2-x-y) &= 0 \end{aligned}$$

Si trovano quattro punti di equilibrio:

$$(0, 0), (1, 1), (3, 0), (0, 2)$$



**Soluzioni sistema**

Soluzioni del sistema  
 $f(x, y) = 0$   
 $g(x, y) = 0$   
 in una data regione R del piano.  
 Algoritmo utilizzato: Newton-Raphson 2D.

Funzioni  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  a primo membro del sistema  
 $f(x, y) = x(3-x-2y)$   
 $g(x, y) = y(2-x-y)$

Regione rettangolare R individuata da  $x_1 \leq x \leq x_2$  e  $y_1 \leq y \leq y_2$   
 $x_1 = -4$      $x_2 = 4$     Num. intervalli = 50  
 $y_1 = -4$      $y_2 = 4$

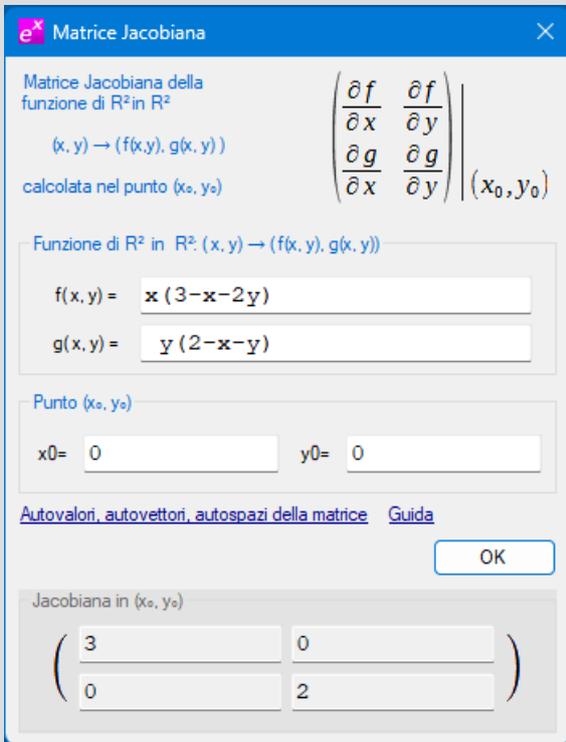
[Imposta l'attuale regione di piano visualizzata](#)  
[Traccia il bordo della regione R](#)

[Guida](#)    ESC per interrompere    **OK**

x	y
0	0
1	1
3	0
0	2

## Classificazione della stabilità degli equilibri mediante matrice Jacobiana

1) Punto (0, 0)



**Matrice Jacobiana**

Matrice Jacobiana della funzione di  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^2$

$$(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y)) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \Big|_{(x_0, y_0)}$$

calcolata nel punto  $(x_0, y_0)$

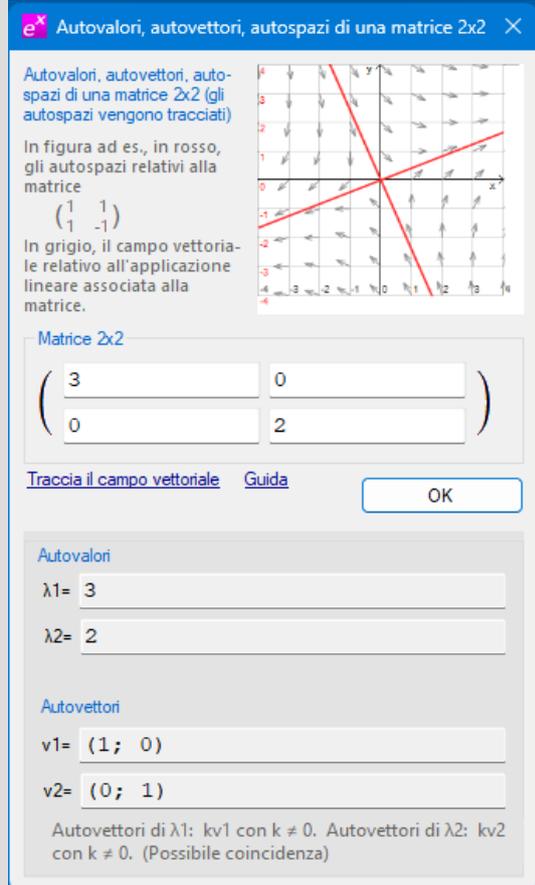
Funzione di  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^2$ :  $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$   
 $f(x, y) = x(3-x-2y)$   
 $g(x, y) = y(2-x-y)$

Punto  $(x_0, y_0)$   
 $x_0 = 0$      $y_0 = 0$

[Autovalori, autovettori, autospazi della matrice](#)    [Guida](#)

**OK**

Jacobiana in  $(x_0, y_0)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$


**Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2**

Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2x2 (gli autospazi vengono tracciati)

In figura ad es., in rosso, gli autospazi relativi alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

In grigio, il campo vettoriale relativo all'applicazione lineare associata alla matrice.

Matrice 2x2

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

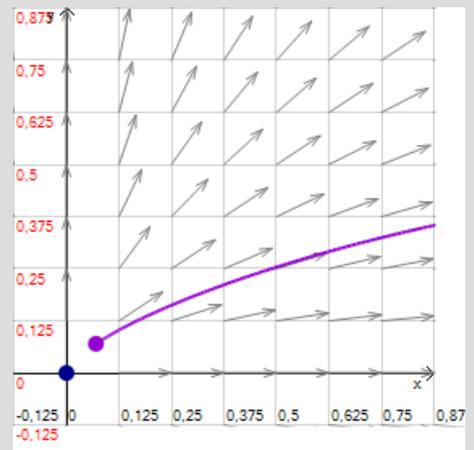
[Traccia il campo vettoriale](#)    [Guida](#)    **OK**

Autovalori  
 $\lambda_1 = 3$   
 $\lambda_2 = 2$

Autovettori  
 $v_1 = (1; 0)$   
 $v_2 = (0; 1)$

Autovettori di  $\lambda_1$ :  $kv_1$  con  $k \neq 0$ . Autovettori di  $\lambda_2$ :  $kv_2$  con  $k \neq 0$ . (Possibile coincidenza)

Gli autovalori della matrice jacobiana sono entrambi positivi, quindi il punto  $(0, 0)$  è un **nodo instabile**, tutte le traiettorie con punto iniziale vicino all'origine si allontanano dall'origine.



2) Punto  $(1, 1)$

Gli autovalori della matrice jacobiana sono uno positivo e l'altro negativo, quindi il punto  $(1, 1)$  è un **punto di sella**. Un autovettore relativo all'autovalore negativo è  $(1, 41421356; 1)$ .

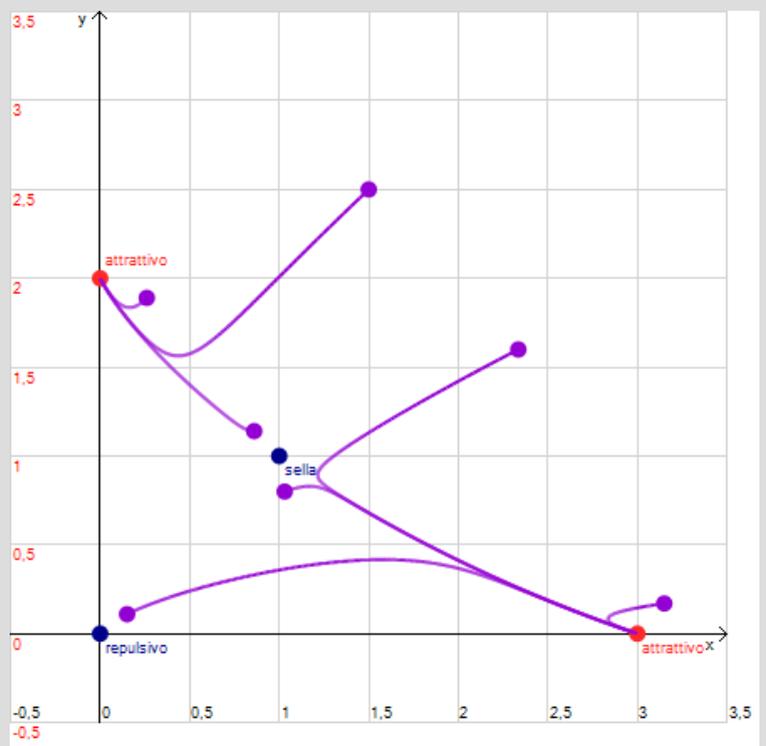
3) Punto  $(3, 0)$

Gli autovalori della matrice jacobiana sono entrambi negativi, quindi il punto  $(3, 0)$  è un **nodo stabile**, tutte le traiettorie con punto iniziale vicino a  $(3, 0)$  tendono a  $(3, 0)$ .

4) Punto  $(0, 2)$

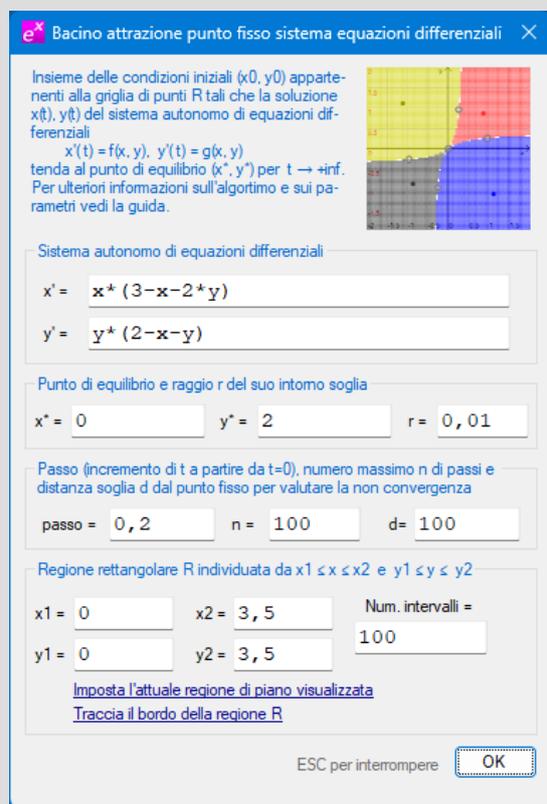
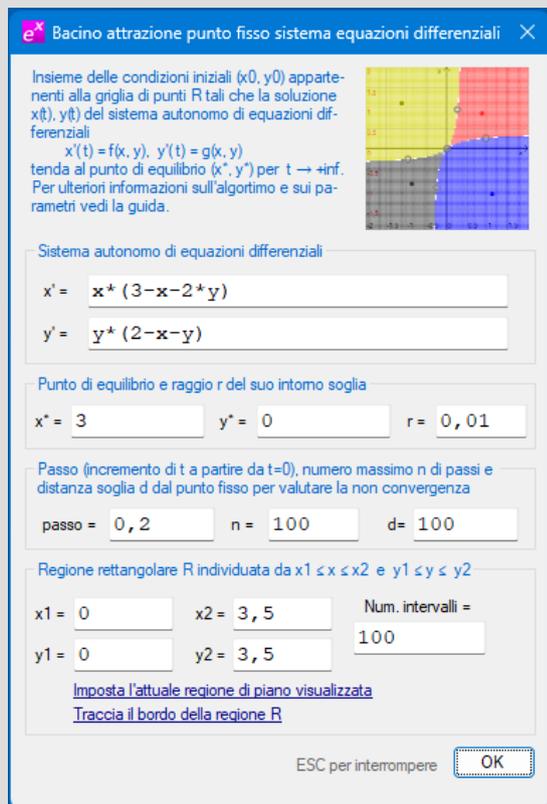
Gli autovalori della matrice jacobiana sono entrambi negativi, quindi il punto  $(0, 2)$  è un altro **nodo stabile**, tutte le traiettorie con punto iniziale vicino a  $(0, 2)$  tendono a  $(0, 2)$ .

La figura a fianco mostra i quattro punti di equilibrio: in rosso i nodi stabili (attrattivi), in blu il nodo instabile (repulsivo) e il punto di sella. I punti viola sono i punti iniziali di alcune traiettorie (soluzioni). Le traiettorie sono state tracciate mediante l'opzione *Calcolo – Sistema autonomo equazioni differenziali*.

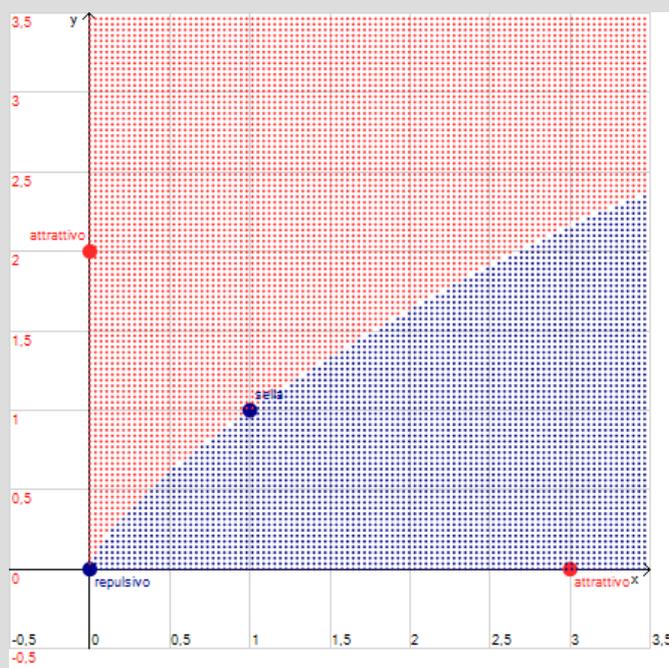


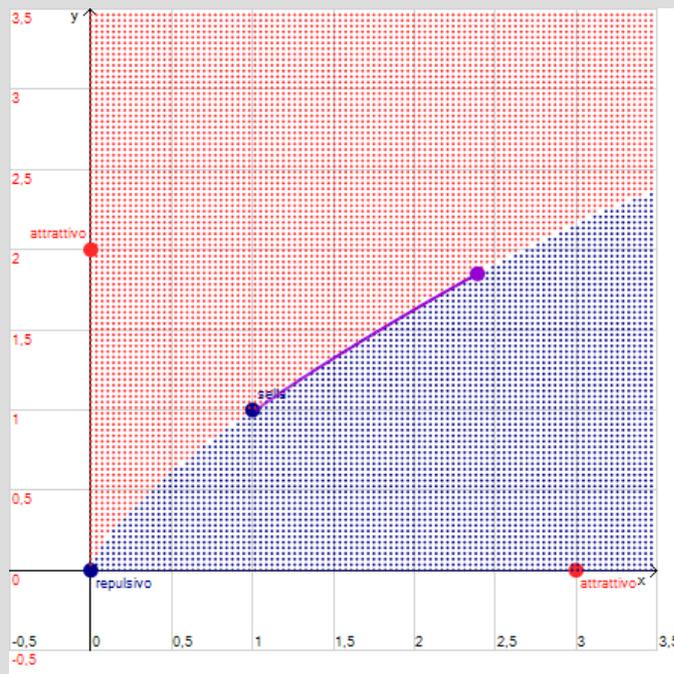
Bacino d’attrazione dei due punti di equilibrio attrattivi (nodi stabili)

Le informazioni acquisite sui punti di equilibrio che sono riassunte nella figura precedente ci consentono di ipotizzare quale sia l’intero ritratto di fase per il nostro sistema relativamente al primo quadrante. Per confermare le nostre ipotesi utilizzeremo l’opzione *Bacino d’attrazione punto di equilibrio sistema equazioni differenziali*. Le figure seguenti mostrano le finestre d’impostazione per i bacini relativi ai due punti di equilibrio attrattivi.

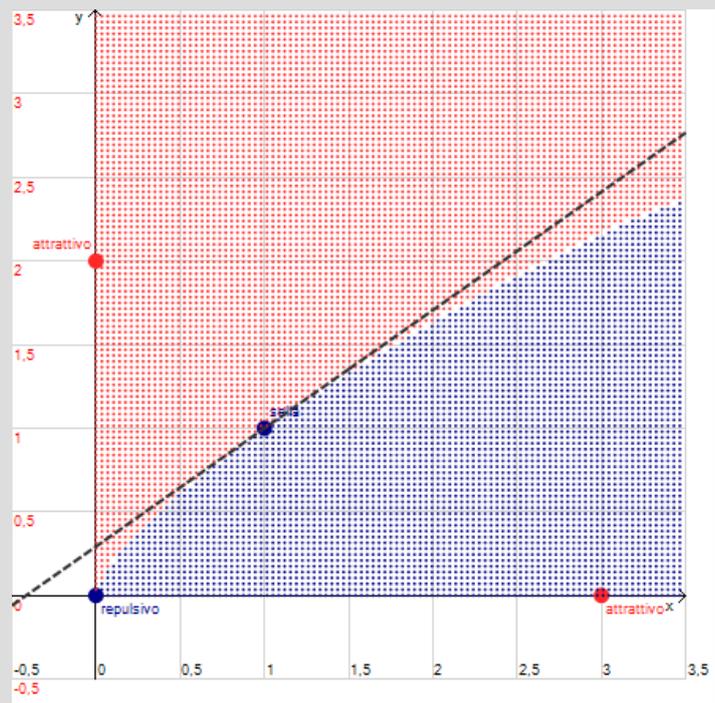


La figura a fianco mostra i due bacini d’attrazione: le traiettorie che partono dai punti rossi sono attratte dal punto di equilibrio (0, 2), le traiettorie che partono dai punti blu sono attratte dal punto di equilibrio (3, 0). La comune frontiera dei due bacini è la curva che costituisce la **varietà stabile** del punto di sella: le uniche traiettorie che tendono al punto di sella per  $t \rightarrow +\infty$  sono quelle che partono dai punti di tale curva (questa cosa puoi **approssimativamente** verificarla tracciando una soluzione che parta da uno di questi punti, impostando un passo per  $t$  molto piccolo, ad es. 0,01, vedi figura seguente).





Il teorema della varietà stabile afferma che la varietà stabile di una sella relativa ad un sistema non lineare 2D è una curva 1D **tangente**, nel punto di sella, alla retta passante per il punto di sella, parallela all'autovettore della matrice jacobiana relativo all'autovalore negativo (è cioè tangente all'autospazio stabile del sistema **linearizzato**). Ne hai conferma osservando la figura a fianco: la retta tratteggiata è la retta in questione, il suo coefficiente angolare è  $1/\sqrt{2} \approx 1/1,41421356$ .



Nota. Nelle precedenti finestre d'impostazione per la ricerca dei bacini d'attrazione il parametro *passo* è stato impostato a 0,2 anziché assumere il valore di default 0,1. Una via alternativa, ma con tempi di elaborazione ancora più lunghi, sarebbe stata *passo=0,1* e *n=200* anziché *n=100*. L'impostazione di questi parametri dipende dalla "velocità" con cui le traiettorie raggiungono il punto di equilibrio. Tener presente che l'algoritmo utilizzato ci consente di fare degli "esperimenti" ma il risultato deve sempre essere valutato attentamente.