

Integrali doppi su domini descritti in coordinate polari

EffeDiX può determinare **approssimazioni numeriche** di integrali doppi su domini descritti in coordinate polari (r, t) con r coordinata radiale e t coordinata angolare (per comodità di digitazione r sostituisce l'usuale lettera ρ e t sostituisce l'usuale lettera ϑ); tali domini sono definiti dalle disequazioni

$$t_1 \leq t \leq t_2 \quad \text{e} \quad f(t) \leq r \leq g(t)$$

E' inoltre possibile tracciare i domini su cui gli integrali sono definiti e i due tratti di curve $r=f(t)$ e $r=g(t)$ in coordinate polari che delimitano tali domini. L'opzione da utilizzare è: *Calcolo - Integrale doppio - Su dominio descritto in coordinate polari*. Esaminiamo alcuni esempi.

Esempio 1

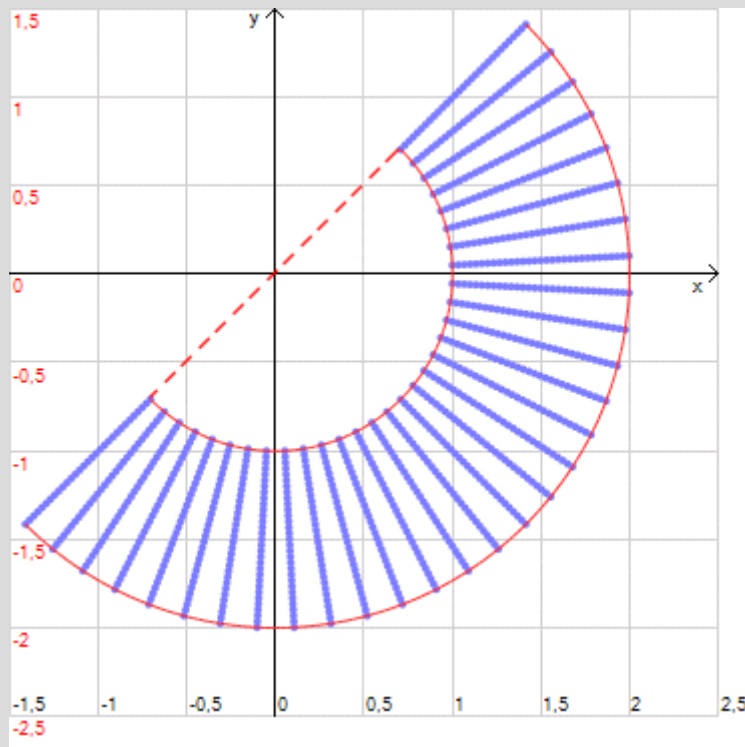
Calcolare l'integrale

$$\iint_D xy^2 dx dy$$

dove D indica il dominio al di sotto della retta $y=x$, limitato dalle due circonferenze

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = 4$$

(vedi figura seguente).



Utilizzeremo l'opzione relativa a domini definiti in coordinate polari. Si vede subito che la coordinata angolare t varia da $-\frac{3\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{4}$ e quella radiale r da 1 a 2. Nella figura seguente la finestra di impostazione. Il risultato approssimato fornito da EffeDiX è 1,461, e si legge in basso nel campo grigio a sola lettura della finestra; il risultato simbolico è

$$\frac{31}{15\sqrt{2}} \cong 1,46135$$

Non mettendo la spunta sull'opzione *Più accuratezza* il risultato approssimato sarebbe stato 1,5; l'ultima cifra viene, come al solito, arrotondata.

Integrale doppio su dominio descritto in coordinate polari
✕

Coordinate polo

x = y =

Definizione dominio D d'integrazione

Dominio descritto in coordinate polari (r, t) con r coordinata radiale e t coordinata angolare, definito da

$t_1 \leq t \leq t_2$ e $f(t) \leq r \leq g(t)$

t1 = t2 =

f(t) =

g(t) =

[Traccia il dominio](#)
 [Traccia il grafico di r = f\(t\)](#)
 [Traccia il grafico di r = g\(t\)](#)

Funzione h(x,y) da integrare sul dominio D

h(x,y) =

Più accuratezza
 [Guida](#)
OK

$\iint_D h(x,y) dx dy =$

Attenzione: se la funzione h(x,y) non è definita in punti del dominio D, i valori forniti potrebbero non essere attendibili

Per tracciare il dominio e i due archi di circonferenza della figura utilizzare le opzioni *Traccia il dominio*, *Traccia il grafico di r=f(t)* e *Traccia il grafico di r=g(t)* che trovate nella stessa finestra di impostazione; poiché tali opzioni interagiscono con la finestra principale è opportuno non massimizzare quest'ultima in modo che tutte le finestre aperte restino in primo piano (comunque potete sempre richiamare l'ultima finestra aperta facendo clic sul pulsante in alto a destra della finestra principale). Notare che nel nostro caso le due funzioni $f(t)$ e $g(t)$ sono costanti, infatti r varia sempre da $f(t)=1$ a $g(t)=2$, per qualsiasi valore dell'angolo t .

Esempio 2

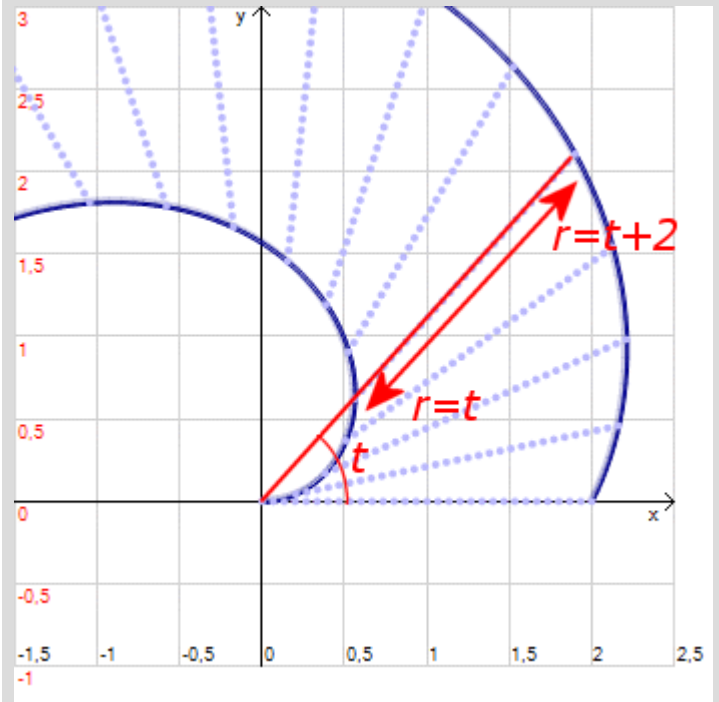
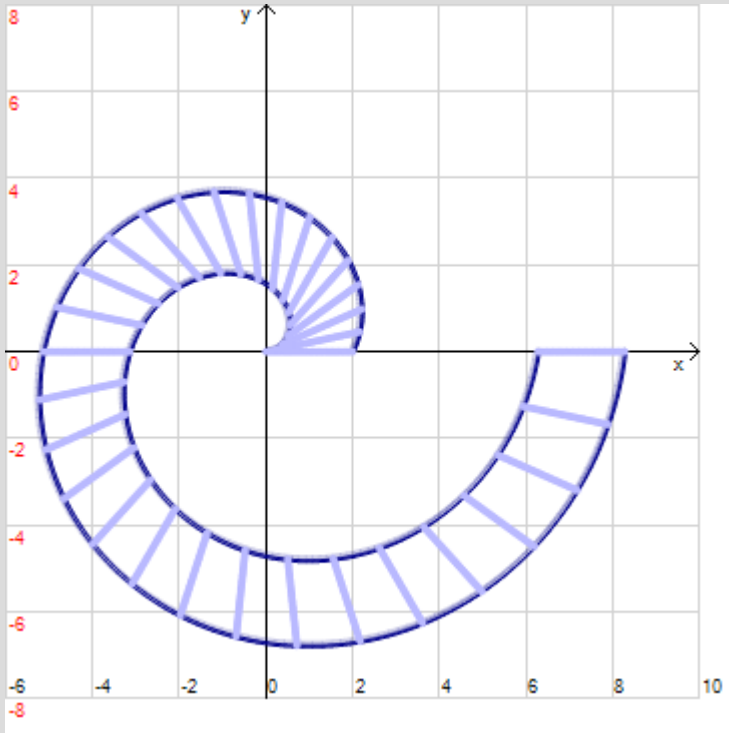
Calcolare l'integrale

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

dove D indica il dominio delimitato dalle due spirali rispettivamente di equazioni polari

$$r = t \quad \text{e} \quad r = t + 2 \quad \text{con} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

e dal semiasse positivo delle x (vedi figura seguente). Utilizzeremo l'opzione relativa a domini definiti in coordinate polari.



Nella figura seguente la finestra di impostazione.

e^x
Integrale doppio su dominio descritto in coordinate polari
✕

Coordinate polo

x = y =

Definizione dominio D d'integrazione

Dominio descritto in coordinate polari (r, t) con r coordinata radiale e t coordinata angolare, definito da
 $t_1 \leq t \leq t_2$ e $f(t) \leq r \leq g(t)$

t1 = t2 =
 f(t) =
 g(t) =

[Traccia il dominio](#)
[Traccia il grafico di r = f\(t\)](#)
[Traccia il grafico di r = g\(t\)](#)

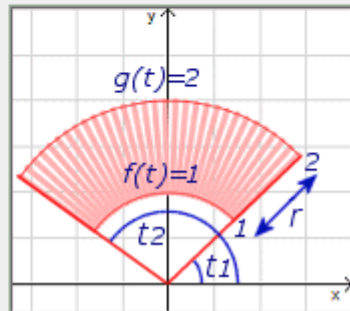
Funzione h(x,y) da integrare sul dominio D

h(x,y) =

Più accuratezza
 [Guida](#)
OK

$$\iint_D h(x,y) dx dy =$$

Attenzione: se la funzione h(x,y) non è definita in punti del dominio D, i valori forniti potrebbero non essere attendibili



Il risultato fornito da EffeDiX è 261 e quello simbolico

$$\frac{8}{3}\pi(2 + 3\pi + 2\pi^2) \cong 261,079$$

Da notare che in questo caso le due funzioni $f(t)$ e $g(t)$ non sono costanti e la coordinata radiale r varia da t a $t+2$.

Per tracciare il dominio e le spirali della figura utilizzare le opzioni *Traccia il dominio*, *Traccia il grafico di $r=f(t)$* e *Traccia il grafico di $r=g(t)$* che trovate nella stessa finestra di impostazione.

Esempio 3

Determinare l'area di un petalo della curva in figura (*Rosa a quattro petali*) la cui equazione in coordinate polari è

$$r = \cos(2t) \quad \text{con } 0 \leq t \leq 2\pi$$

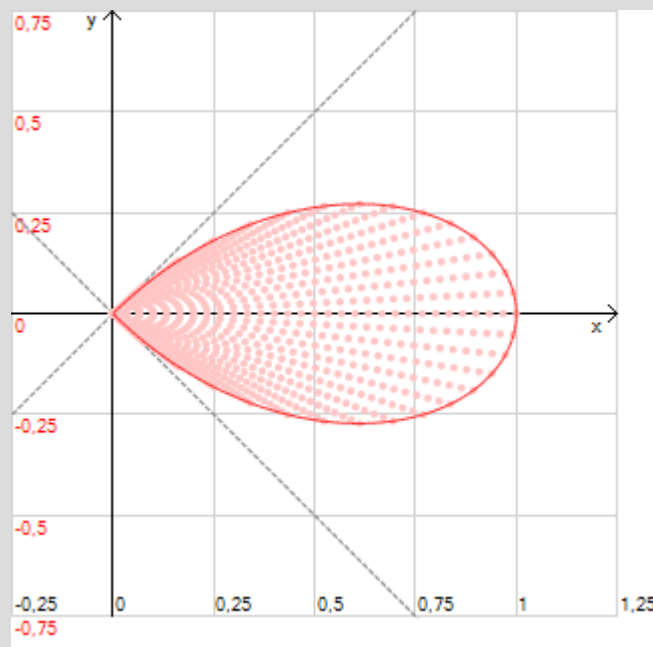
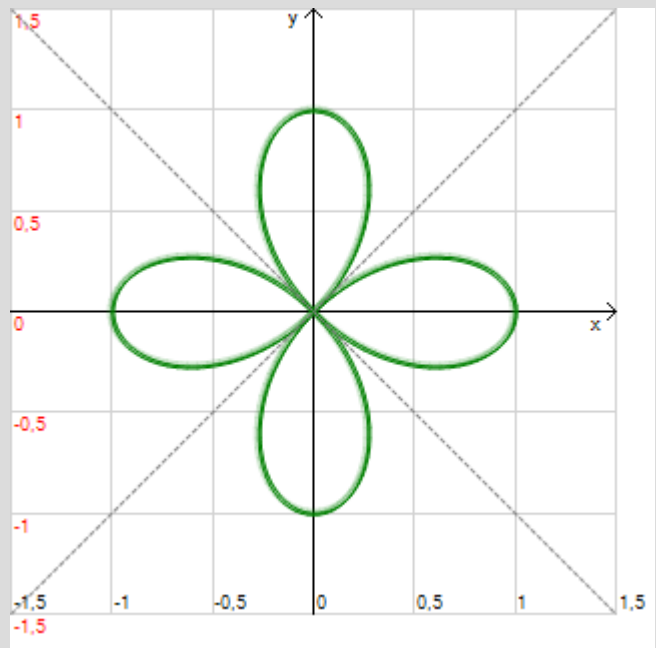
La curva in figura è stata tracciata mediante l'opzione *Oggetti grafici - Curva in forma polare* e sono anche state tracciate le due bisettrici dei quadranti.

Conviene considerare la curva delimitante il petalo che si trova sul semiasse positivo delle x , i cui punti hanno la coordinata angolare che varia da $-\pi/4$ a $\pi/4$. Indichiamo con D il dominio individuato da tale curva.

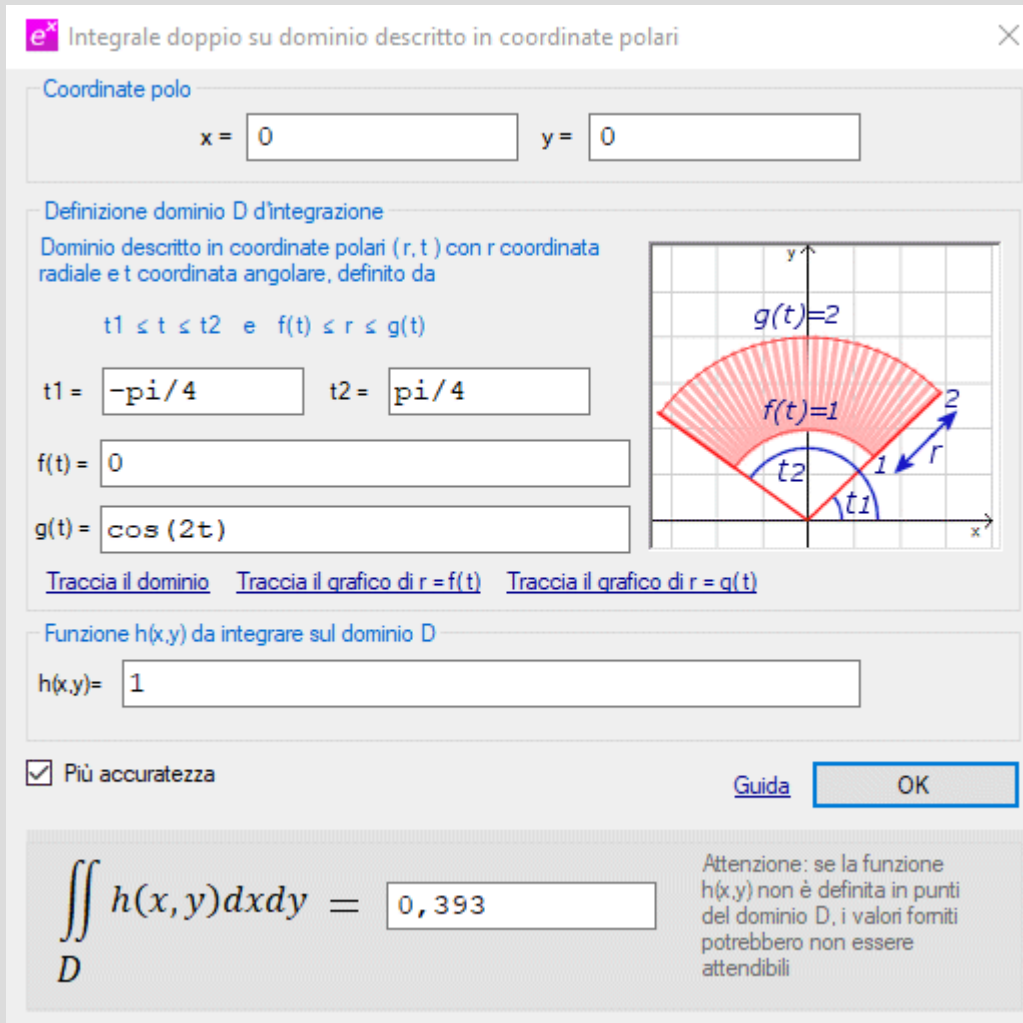
L'area del petalo è data da

$$\iint_D 1 \, dx dy$$

Per evidenziare il dominio D e la curva che lo delimita (vedi figura seguente) utilizzeremo come al solito le opzioni *Traccia il dominio* e *Traccia il grafico di $r=g(t)$* che trovate nella stessa finestra di impostazione.



In figura la finestra di impostazione.



Il risultato fornito da EffeDiX è 0,393 (l'ultima cifra come al solito viene arrotondata), il risultato simbolico è $\pi/8 \cong 0,3927$.

Notare che in coordinate cartesiane la nostra curva è una curva algebrica di sesto grado

$$(x^2 + y^2)^3 = (x^2 - y^2)^2$$

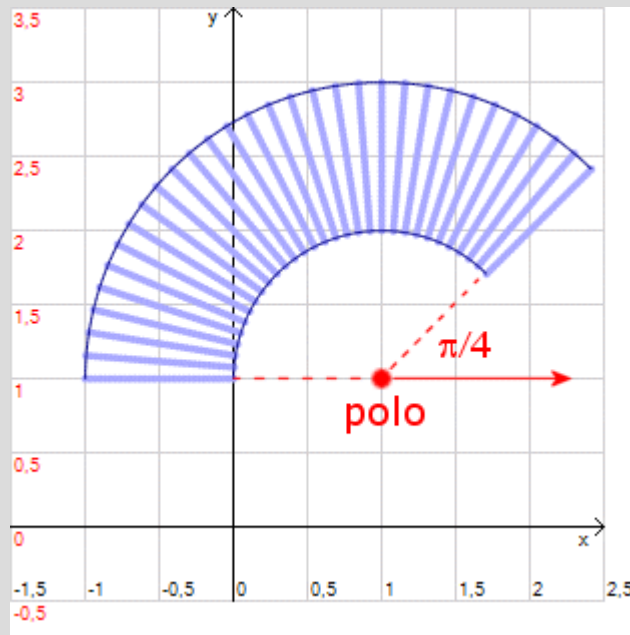
e sarebbe complicato operare l'integrazione in coordinate cartesiane.

Esempio 4

Calcolare l'integrale

$$\iint_D x^3 - y^2 \, dx \, dy$$

Dove D indica la parte di corona circolare delimitata dalle circonferenze di centro $(1; 1)$ e rispettivamente di raggio 1 e 2 e dai semipiani $y \geq x$ e $y \geq 1$ (vedi figura seguente).



La figura seguente mostra la finestra d’impostazione; notare che l’origine del sistema di coordinate polari è stata spostata nel punto di coordinate cartesiane (1; 1).

Integrale doppio su dominio descritto in coordinate polari
✕

Coordinate polo

x = y =

Definizione dominio D d'integrazione

Dominio descritto in coordinate polari (r, t) con r coordinata radiale e t coordinata angolare, definito da

$t_1 \leq t \leq t_2$ e $f(t) \leq r \leq g(t)$

t1 = t2 =

f(t) =

g(t) =

[Traccia il dominio](#)
[Traccia il grafico di r = f\(t\)](#)
[Traccia il grafico di r = g\(t\)](#)

Funzione h(x,y) da integrare sul dominio D

h(x,y) =

Più accuratezza
 [Guida](#)

$$\iint_D h(x,y) dx dy = \text{ }$$

Attenzione: se la funzione h(x,y) non è definita in punti del dominio D, i valori forniti potrebbero non essere attendibili

La figura seguente mostra come EffeDiX può evidenziare i due semipiani (opzione *Oggetti grafici – Semipiani*).

