

Sistemi di due equazioni

Data una regione rettangolare R del piano, EffeDiX può **approssimare** tutte le soluzioni (x_i, y_i) appartenenti ad R del sistema di due equazioni

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

L'opzione da utilizzare è *Calcolo – Soluzioni sistema*. L'algoritmo utilizzato è quello di Newton-Raphson nella versione 2D e presuppone che le funzioni $f(x, y)$ e $g(x, y)$ siano parzialmente derivabili. Il valore preimpostato di 50 intervalli sia per la base che per l'altezza della regione rettangolare R è di solito più che sufficiente per individuare tutte le soluzioni.

EffeDiX fornisce una tabella con tutte le soluzioni trovate; per tracciare una soluzione nel piano fare **doppio clic** sulla riga relativa.

Esempio 1

Determinare i punti di intersezione della circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

con la parabola di equazione

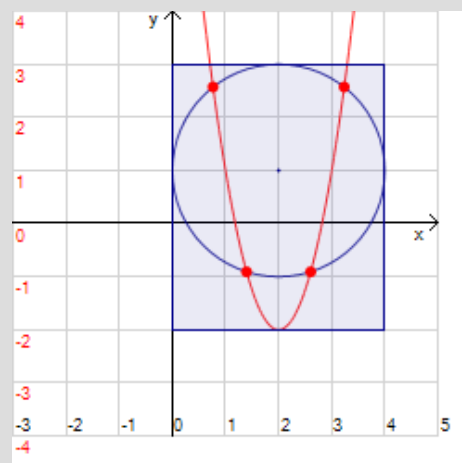
$$y = 3x^2 - 12x + 10$$

Dopo aver tracciato circonferenza e parabola ci rendiamo conto che la regione R che ci interessa potrebbe essere quella evidenziata in figura; la finestra di impostazione per il sistema è quella a fianco. Notare che nel nostro caso si ha

$$g(x, y) = 3x^2 - 12x + 10 - y$$

Le soluzioni sono visualizzate nella tabella a sola lettura che vedete nella parte in basso, in grigio, della finestra d'impostazione. Per tracciare i punti di intersezione basta fare doppio clic sulla riga relativa a ciascuna soluzione.

Per evidenziare la regione R di ricerca delle soluzioni fare clic sul link "Traccia il bordo della regione R " che trovate nella finestra d'impostazione.



Soluzioni sistema

Soluzioni del sistema

$f(x, y) = 0$

$g(x, y) = 0$

in una data regione R del piano.

Algoritmo utilizzato: Newton-Raphson 2D.

Funzioni $f(x, y)$, $g(x, y)$ a primo membro del sistema

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1$

$g(x, y) = 3x^2 - 12x + 10 - y$

Regione rettangolare R individuata da $x_1 \leq x \leq x_2$ e $y_1 \leq y \leq y_2$

$x_1 = 0$ $x_2 = 4$ Num. intervalli = 50

$y_1 = -2$ $y_2 = 3$

[Imposta l'attuale regione di piano visualizzata](#)

[Traccia il bordo della regione \$R\$](#)

ESC per interrompere OK

	x	y
►	1,39632176	-0,90671775
	2,60367824	-0,90671775
	0,76530916	2,57338442
	3,23469084	2,57338442

Esempio 2

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} f(x,y) = x^3 + 2x^2 - xy - x - 2y - 2 = 0 \\ g(x,y) = 3x^2 - xy + 5x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

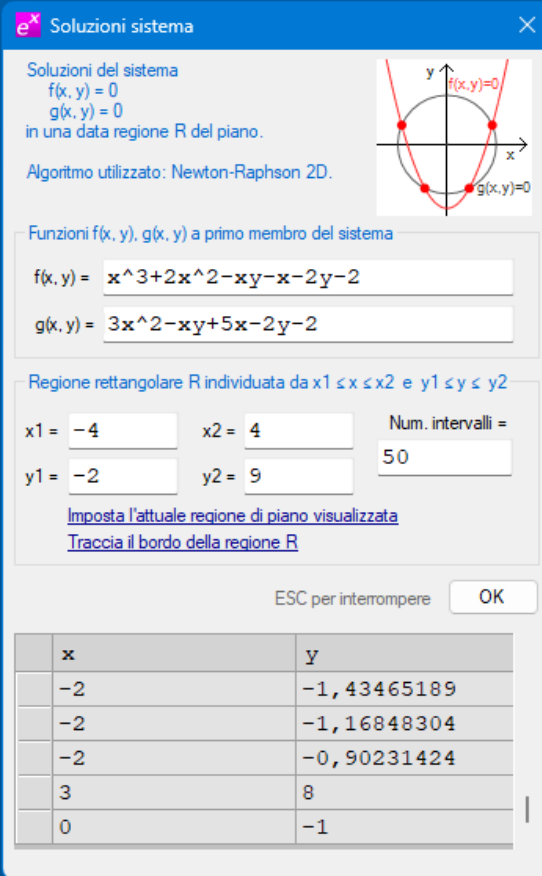
In questo caso EffeDiX trova 269 soluzioni nella regione R definita dalle disequazioni

$$\begin{aligned} -4 &\leq x \leq 4 \\ -2 &\leq y \leq 9 \end{aligned}$$

Le prime 267 soluzioni sono **tutte** della forma

$$(-2, \dots)$$

e le ultime due sono $(3, 8)$ e $(0, -1)$. Per capire come stanno le cose conviene tracciare i due luoghi di zeri, $f(x, y)=0$ e $g(x, y)=0$, mediante l'opzione *Oggetti grafici – Luogo di punti*.



Soluzioni sistema

Soluzioni del sistema
 $f(x, y) = 0$
 $g(x, y) = 0$
 in una data regione R del piano.

Algoritmo utilizzato: Newton-Raphson 2D.

Funzioni $f(x, y)$, $g(x, y)$ a primo membro del sistema

$f(x, y) = x^3 + 2x^2 - xy - x - 2y - 2$

$g(x, y) = 3x^2 - xy + 5x - 2y - 2$

Regione rettangolare R individuata da $x_1 \leq x \leq x_2$ e $y_1 \leq y \leq y_2$

$x_1 = -4$ $x_2 = 4$ Num. intervalli = 50

$y_1 = -2$ $y_2 = 9$

[Imposta l'attuale regione di piano visualizzata](#)
[Traccia il bordo della regione R](#)

ESC per interrompere OK

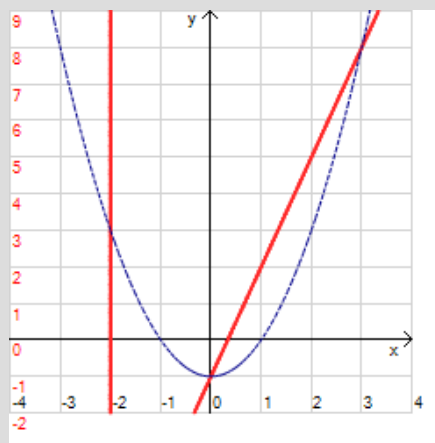
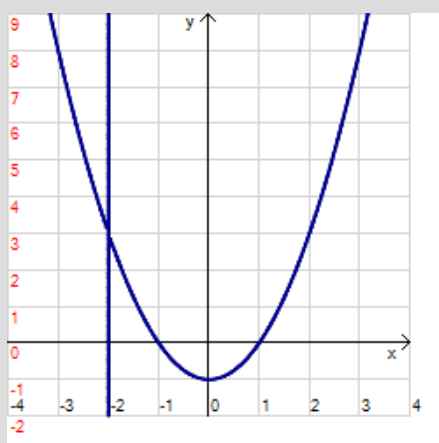
x	y
-2	-1,43465189
-2	-1,16848304
-2	-0,90231424
3	8
0	-1

Le figure seguenti mostrano, nell'ordine in blu e in rosso, i due luoghi di punti $f(x, y)=0$ e $g(x, y)=0$. Le soluzioni della prima equazione sono tutti i punti della retta $x=-2$ più tutti i punti della parabola $y=x^2-1$ (l'equazione della parabola si trova dividendo il primo membro dell'equazione per $x+2$); le soluzioni della seconda equazione sono i punti delle due rette $x=-2$ e $y=3x-1$. Dunque le soluzioni del sistema sono le **infinite** soluzioni $(-2, y)$ con y numero reale qualsiasi più i punti $(3, 8)$ e $(0, -1)$. D'altra parte $f(x, y)$ può fattorizzarsi, come suggerito dalla prima figura, nel seguente modo

$$f(x, y) = (x+2)(x^2 - y - 1)$$

e $g(x, y)$ così

$$g(x, y) = (x+2)(3x - y - 1)$$



La figura a fianco mostra la finestra di impostazione per tracciare il primo luogo di zeri, in modo analogo tratterete il secondo luogo.

e^x Luogo di punti

Insieme dei punti della regione rettangolare R del piano tali che:

- prima opzione (luogo di zeri)
 $f(x, y) = 0$
- seconda opzione
 $f(x, y) < 0$
- terza opzione
 $f(x, y) > 0$

Esempio in figura: sono tracciati $\cos(xy) = 0$, $\cos(xy) > 0$ (in rosso) e $\cos(xy) < 0$ (in azzurro)

Condizione che definisce il luogo

☒ $f(x, y) = 0$ ☐ $f(x, y) < 0$ ☐ $f(x, y) > 0$

$f(x, y) =$

Regione rettangolare R individuata da $x_1 \leq x \leq x_2$ e $y_1 \leq y \leq y_2$

$x_1 =$ $x_2 =$ num. intervalli =

$y_1 =$ $y_2 =$

[Imposta l'attuale regione di piano visualizzata](#)
[Traccia il bordo della regione R](#)

[Guida](#) ESC per interrompere OK

Esempio 3

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} f(x, y) = x^3y + 3xy^2 - 3 = 0 \\ g(x, y) = x^3 - 3y^2 + 2xy - y + 1 = 0 \end{cases}$$

Questo è un sistema non risolubile per via simbolica (cioè per formule); EffeDiX, procedendo con algoritmi numerici, ci mostra che ha un'unica soluzione ed è in grado di valutarla con grande accuratezza.

e^x Soluzioni sistema

Soluzioni del sistema
 $f(x, y) = 0$
 $g(x, y) = 0$
in una data regione R del piano.

Algoritmo utilizzato: Newton-Raphson 2D.

Funzioni $f(x, y)$, $g(x, y)$ a primo membro del sistema

$f(x, y) =$

$g(x, y) =$

Regione rettangolare R individuata da $x_1 \leq x \leq x_2$ e $y_1 \leq y \leq y_2$

$x_1 =$ $x_2 =$ Num. intervalli =

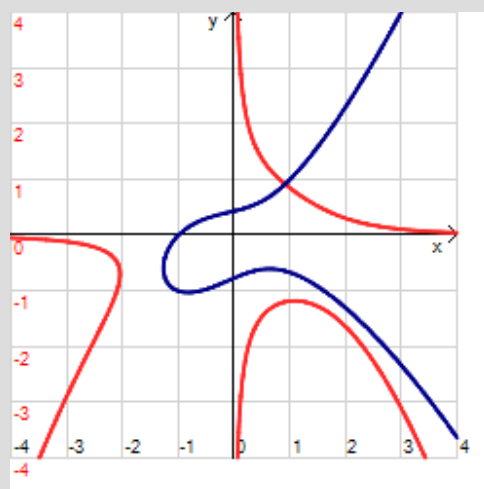
$y_1 =$ $y_2 =$

[Imposta l'attuale regione di piano visualizzata](#)
[Traccia il bordo della regione R](#)

ESC per interrompere OK

	x	y
►	0,913402	0,91647931

La figura a fianco mostra i grafici delle due equazioni, tracciati come luoghi di zeri (il grafico di $f(x, y)=0$ in rosso, quello di $g(x, y)=0$ in blu).



Esempio 4

EffeDiX dispone dell'opzione *Zeri di una funzione* per risolvere numericamente un'equazione nell'incognita x e consente la scelta tra due algoritmi (Newton e Bisezione) nel caso in cui l'algoritmo di Newton non fosse utilizzabile. Questa opzione consente però la ricerca di una soluzione alla volta, dovendosi indicare un intervallo in cui cade un unico zero. Se volessimo determinare **tutte** le soluzioni in un dato intervallo potremmo utilizzare l'opzione per risolvere un sistema. Vediamo ad esempio come determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\sin(2x) - 3\cos(5x) = 0$$

nell'intervallo $[0, \pi]$. Si tratta di un'equazione che può essere risolta solo numericamente.

La figura seguente mostra la finestra d'impostazione e le cinque soluzioni trovate (a destra il grafico della funzione con gli zeri).

Soluzioni sistema

Soluzioni del sistema

$f(x, y) = 0$

$g(x, y) = 0$

in una data regione R del piano.

Algoritmo utilizzato: Newton-Raphson 2D.

Funzioni $f(x, y)$, $g(x, y)$ a primo membro del sistema

$f(x, y) = \sin(2 * x) - 3 * \cos(5 * x) - y$

$g(x, y) = y$

Regione rettangolare R individuata da $x1 \leq x \leq x2$ e $y1 \leq y \leq y2$

$x1 = 0$ $x2 = \pi$ Num. intervalli = 50

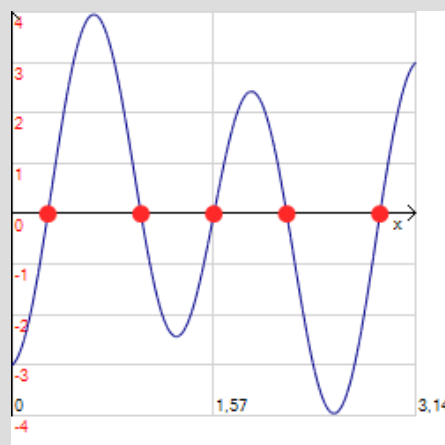
$y1 = -4$ $y2 = 4$

[Imposta l'attuale regione di piano visualizzata](#)

[Traccia il bordo della regione R](#)

ESC per interrompere OK

x	y
1,57079633	0
0,27870761	0
1,00384094	0
2,13775171	0
2,86288505	0



Notare che il sistema equivalente alla nostra equazione è:

$$\begin{cases} f(x, y) = \sin(2x) - 3\cos(5x) - y = 0 \\ g(x, y) = y = 0 \end{cases}$$