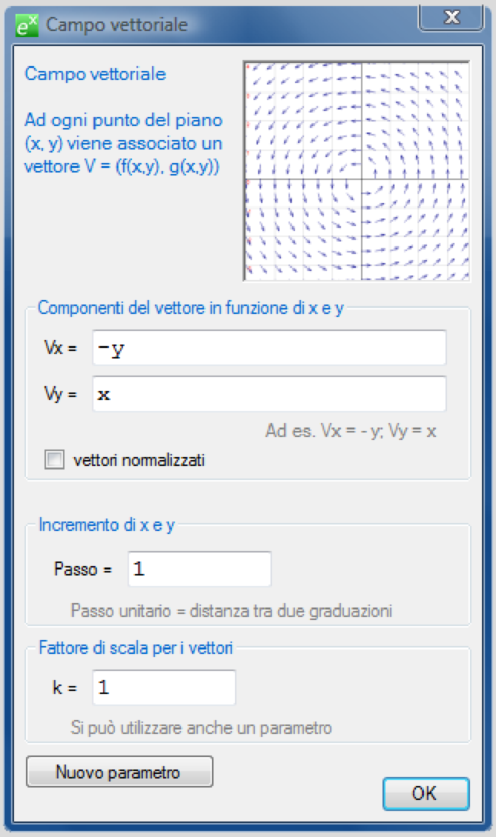
Campi vettoriali

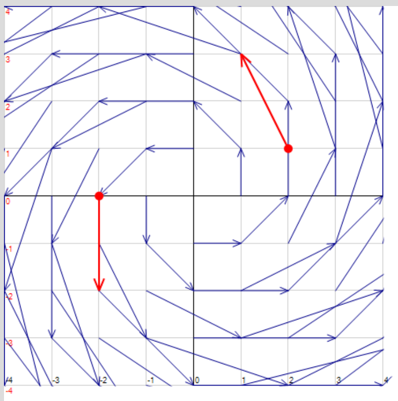
Per definire un **campo vettoriale** dobbiamo associare ad ogni punto P = (x, y) del piano un vettore V, che applicheremo in P, le cui componenti V_x e V_y sono funzioni del punto (x, y), cioè

$V_x = f(x, y)$
$V_y = g(x, y)$

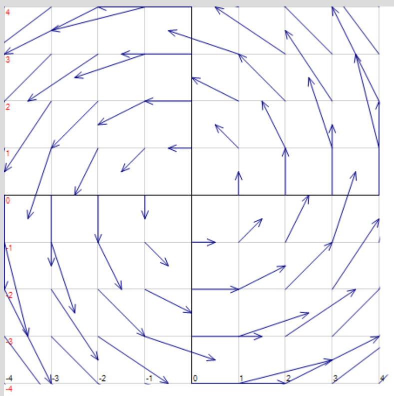


Qui a fianco vedete la finestra per tracciare un campo vettoriale; le impostazioni in questo caso sono:

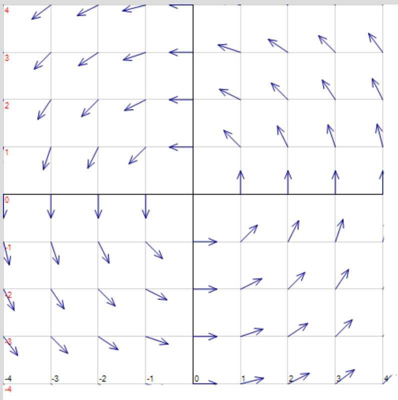
$V_x = -y$
$V_y = x$,
passo=1
k=1 (fattore di scala per tutti i vettori)

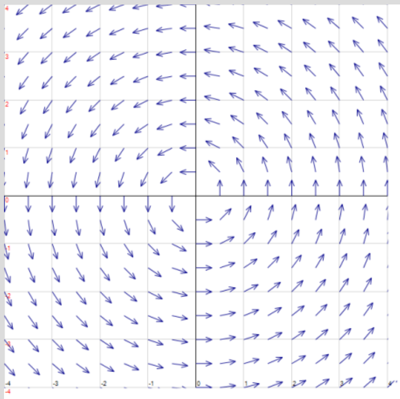


In figura sono evidenziati in rosso, ad esempio, due vettori. Il primo è applicato nel punto (2, 1) e ha componenti (-1, 2), il secondo è applicato in (-2, 0) e ha componenti (0, -2); in entrambi i casi la componente x è uguale a -y e la componente y a x. Il passo uguale a 1 significa che EffeDiX traccerà un vettore in ogni nodo della nostra griglia (relativamente alla griglia impostata). Il fattore di scala k=1 significa che i vettori sono tracciati in scala reale cioè i vettori hanno esattamente la loro lunghezza. Vedremo però che questa impostazione non è quasi mai conveniente perché i vettori si sovrappongono e l'immagine diventa indecifrabile; in molti casi sarà opportuno moltiplicare tutti i vettori per uno **stesso** fattore k (ad esempio k=1/2 o k=1/100).



Nella figura a fianco vedete lo stesso campo vettoriale di prima con k=1/2: tutti i vettori hanno lunghezza dimezzata.

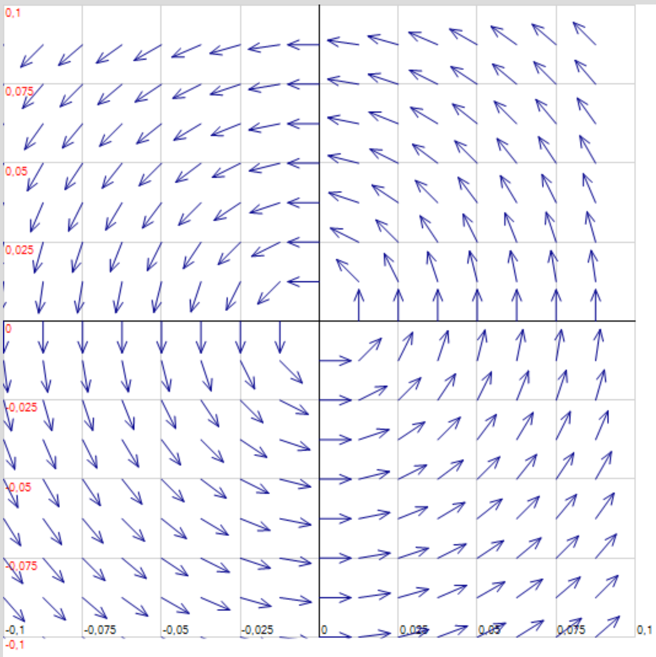




Nella figura a fianco, a sinistra, i vettori sono stati **normalizzati** (spunta sulla casella *vettori normalizzati*), cioè ogni vettore viene diviso per il suo modulo in modo da avere lunghezza unitaria, ed è stato poi applicato un fattore di scala k=1/2: in tal modo tutti i vettori hanno lunghezza 1/2.

Nella figura a destra i vettori sono normalizzati e k è uguale a 1/3: questa volta però il passo è 1/2. Ciò significa che EffeDiX traccerà un vettore per ogni punto di una griglia ottenuta muovendosi di 1/2 passo alla volta nelle direzioni nord, sud, est, ovest (attenzione: mezzo passo significa metà della distanza tra due successive graduazioni su ciascun asse).

Tenete presente che se i vettori sono normalizzati significa che interessa solo la loro direzione e si perde l'informazione relativa al loro modulo; in questo caso parleremo di **campo di direzioni** piuttosto che di campo vettoriale.



Se avete intenzione di zoomare su un campo vettoriale dovete impostare un opportuno fattore di scala; la cosa migliore è impostare un fattore di scala parametrico, ad esempio k=(1/2)^a (con a=0, 1, … , 8), in tal modo potrete comodamente scegliere il fattore più opportuno dopo ogni zoomata utilizzando la slider bar relativa al parametro *a*.

Nella figura a fianco vedete ad esempio il solito campo vettoriale nella regione di piano con x e y compresi tra -0,1 e 0,1 con 8 intervalli (quindi la distanza tra due graduazioni è di 2,5 centesimi); qui le impostazioni sono: vettori normalizzati, passo=1/2, k=1/100.

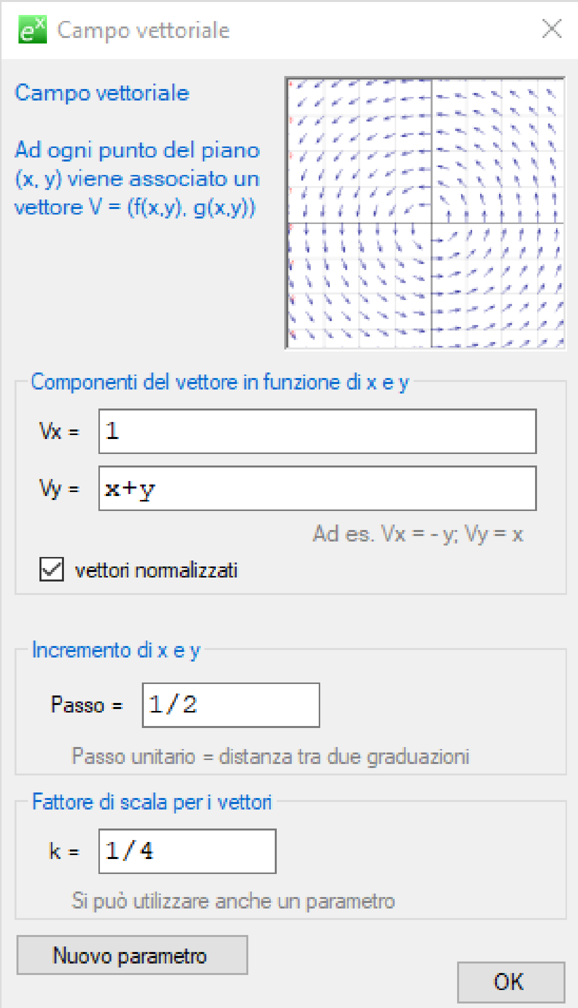
Esempio

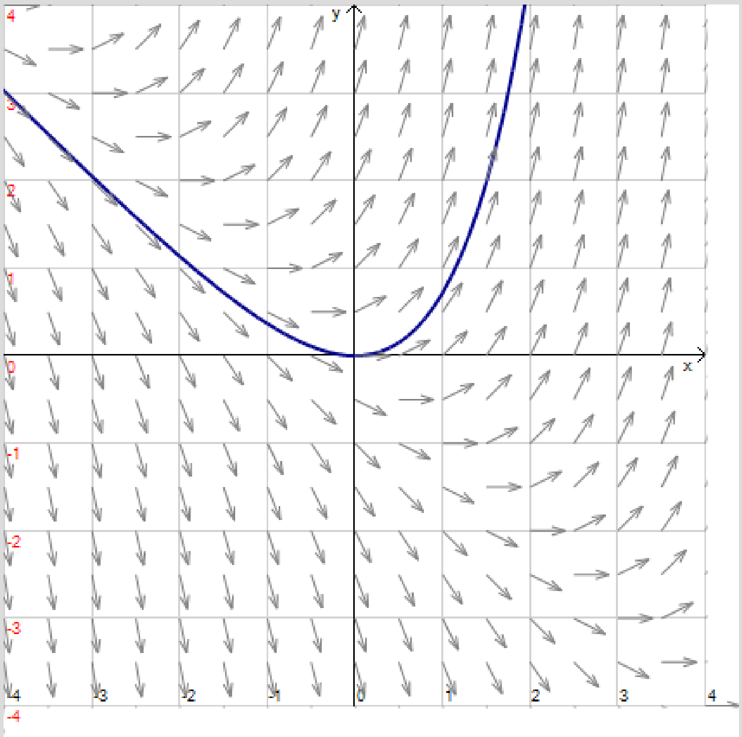
Tracciare il campo di direzioni associato all'equazione differenziale y'=x+y nella regione di piano definita dalle disequazioni -4 ≤ x ≤ 4,-4 ≤ y ≤ 4.

Nelle figure seguenti vedete le impostazioni del campo vettoriale e il suo tracciamento. Da notare che la pendenza del generico vettore applicato nel punto (x, y) è x+y (è il rapporto V_y/V_x). Ciò significa che <u>ogni</u> curva soluzione sarà tangente in <u>ogni</u> suo punto al relativo vettore del campo. Se infatti y(x) è l'unica soluzione dell'equazione differenziale che passa per il punto (x_0, y_0), si ha

$$y'(x_0) = x_0 + y(x_0) = x_0 + y_0$$

cioè la pendenza della curva nel punto (x0, y0) è uguale alla pendenza del vettore applicato in tal punto. Nella seconda figura si vede anche una soluzione dell'equazione differenziale e precisamente quella che passa per il punto (0, 0). Per tracciare il grafico di soluzioni di un'equazione differenziale del primo ordine utilizzare l'opzione *Curva integrale – Soluzione EDO primo ordine*.





Vedi anche:

[primitive]

[equazioni differenziali del primo ordine]

[equazioni differenziali del secondo ordine]

[sistemi autonomi di equazioni differenziali]

[sistemi di equazioni differenziali]