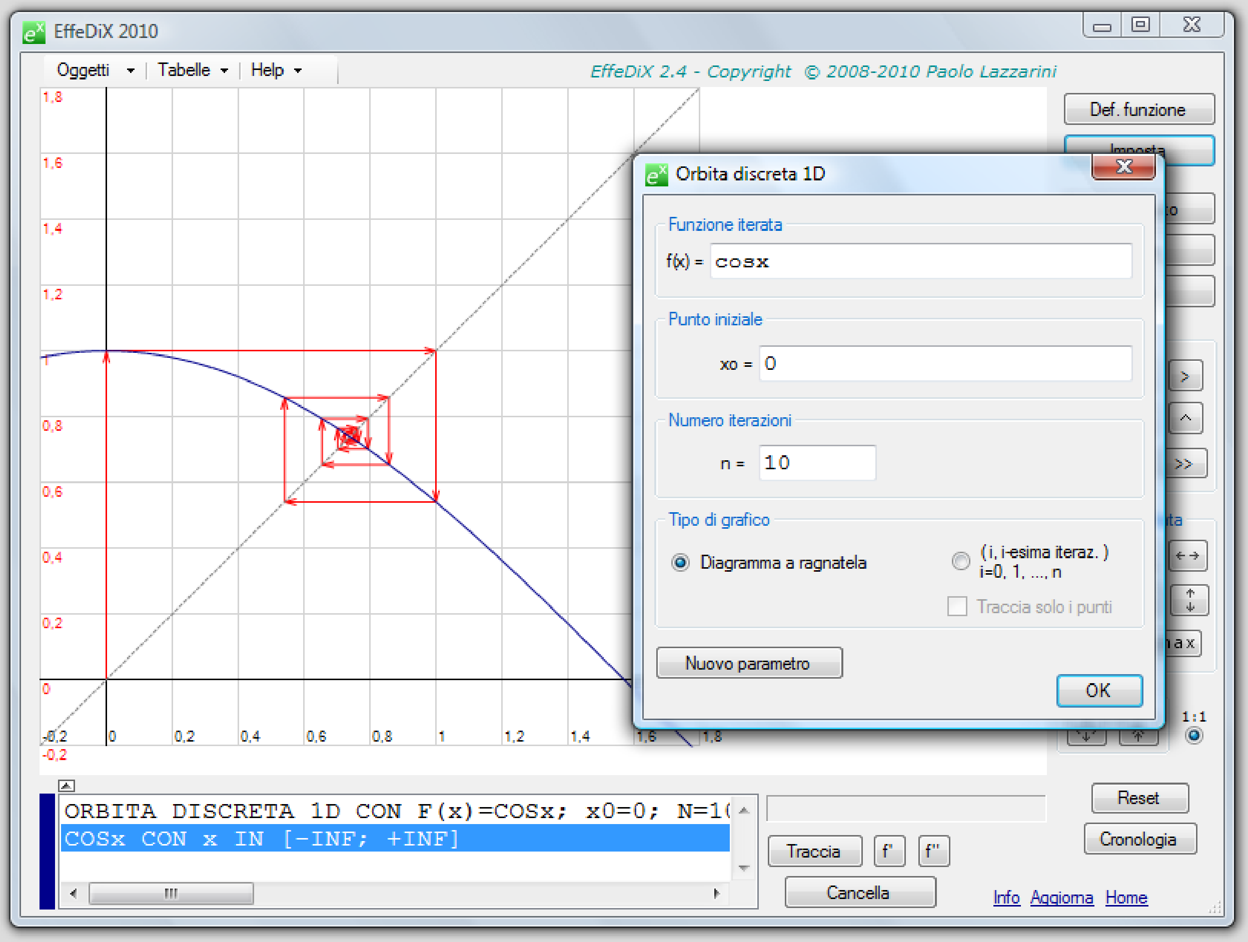
Orbita discreta 1D

EffeDiX fornisce una serie di strumenti grafici e tabelle numeriche per studiare sistemi dinamici discreti sia a dimensione uno sia a dimensione due.

Facendo clic sull'opzione *Orbita discreta 1D* si apre la finestra di impostazione che vedete nella figura seguente: qui, ad esempio, la funzione iterata è f(x) = cos(x), il punto iniziale $x_0=0$ e il numero di iterazioni n=10. Si è scelto inoltre, come tipo di grafico, un **diagramma a ragnatela** (cobweb diagram). Notate che sono stati tracciati anche il grafico della funzione cos(x) e la bisettrice del primo e terzo quadrante (tratteggiata).



Tenete presente che i punti dell'**orbita** (o **successione per ricorrenza**, o semplicemente successione) sono

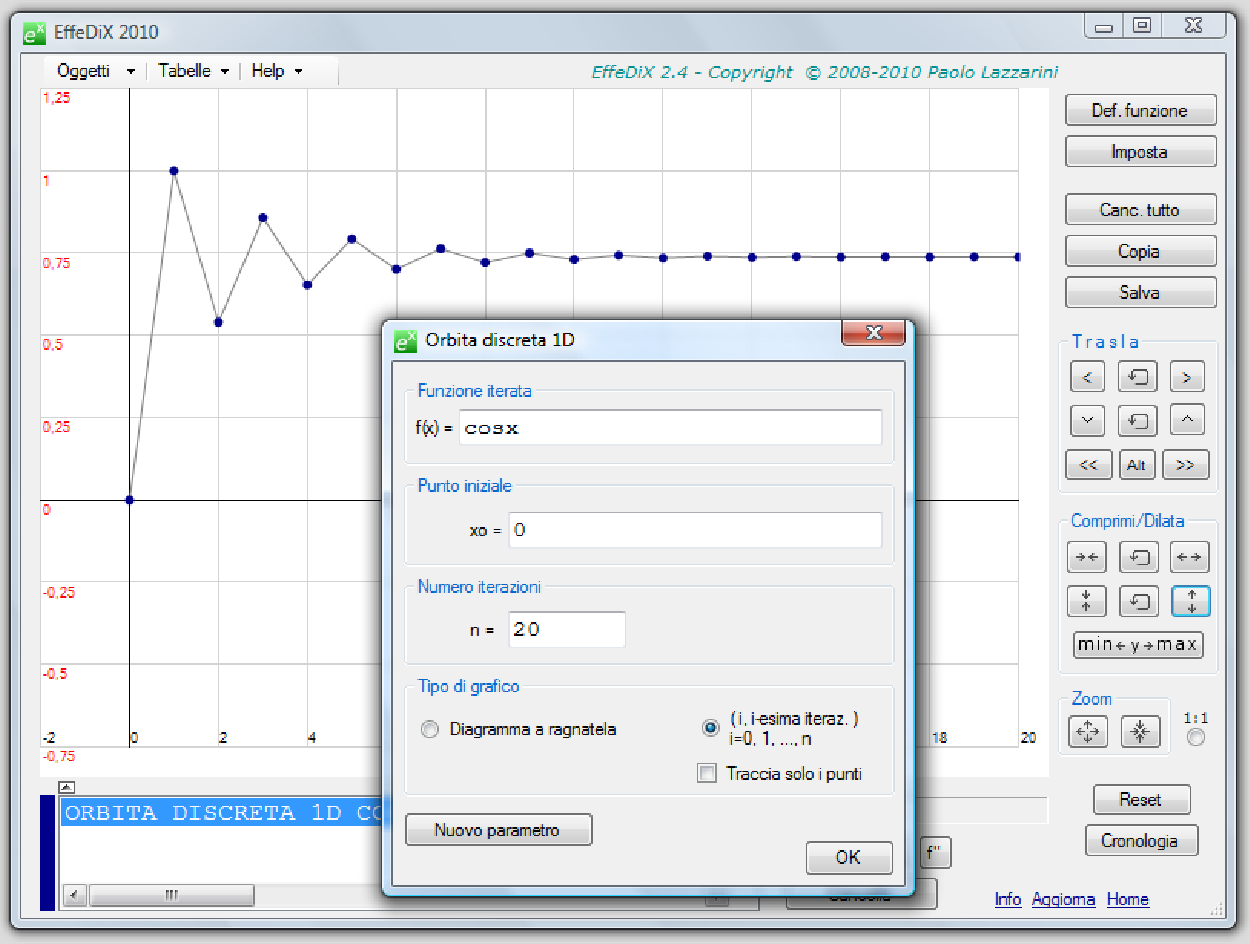
x_0
$x_1= f(x_0)$
$x_2= f(x_1) = f(f(x_0))$
$x_3= f(x_2) = f(f(f(x_0)))$
…
$x_n= f(x_{n-1}) = f(f(\ldots f(x_0)))$

E le frecce del diagramma a ragnatela collegano, nell'ordine, i punti

$(x_0, 0)$	punto iniziale sull'asse delle x
(x_0, x_1)	sul grafico di f(x)
(x_1, x_1)	sulla bisettrice y=x
(x_1, x_2)	di nuovo sul grafico di f(x)
(x_2, x_2)	di nuovo sulla bisettrice y=x

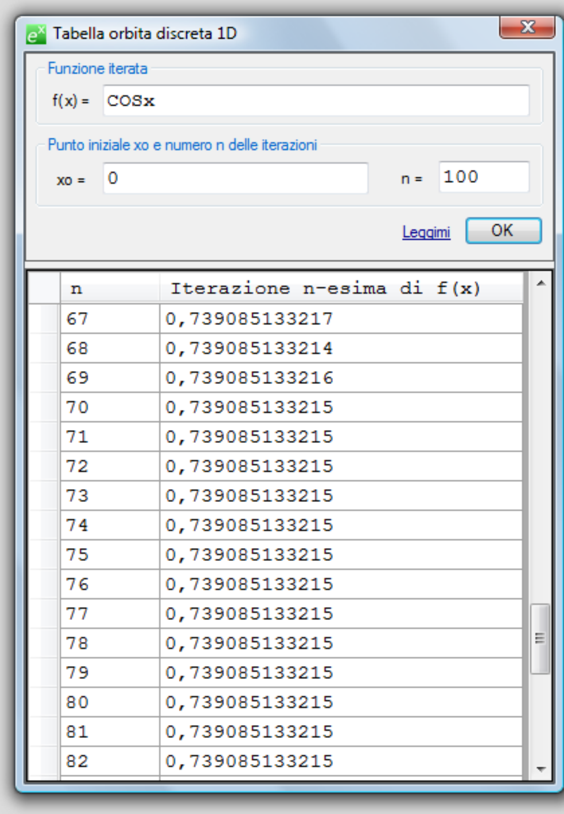
e così via. Possiamo pensare che l'orbita sia rappresentata **sulla bisettrice y=x** anziché sull'asse delle x; i punti dell'orbita così rappresentata sono dunque (x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3) e così via.

La figura seguente mostra invece l'altra scelta possibile per quanto concerne il tipo di grafico: qui si ottiene il grafico che mostra il valore i-esimo x_i dell'orbita in funzione di *i* (cioè l'i-esima iterazione in funzione di *i*).



Sia il primo che il secondo grafico mostrano la rapida convergenza dell'orbita al valore $x^* \approx 0{,}74$.

La tabella della figura seguente, generata mediante l'opzione *Tabelle – Tabella orbita discreta 1D*, mostra che $x^* \approx 0{,}739085133215$.



n	Iterazione n-esima di f(x)
67	0,739085133217
68	0,739085133214
69	0,739085133216
70	0,739085133215
71	0,739085133215
72	0,739085133215
73	0,739085133215
74	0,739085133215
75	0,739085133215
76	0,739085133215
77	0,739085133215
78	0,739085133215
79	0,739085133215
80	0,739085133215
81	0,739085133215
82	0,739085133215

E' interessante verificare che l'orbita tende a x^* qualunque sia il punto iniziale x_0; x^* è un **punto fisso** cioè un punto tale che $f(x^*)= x^*$; in questo caso è un punto fisso **attrattore**. Per fare questa verifica basta parametrizzare x_0 e generare un'animazione.

Esempio 1

Tracciando il grafico della funzione

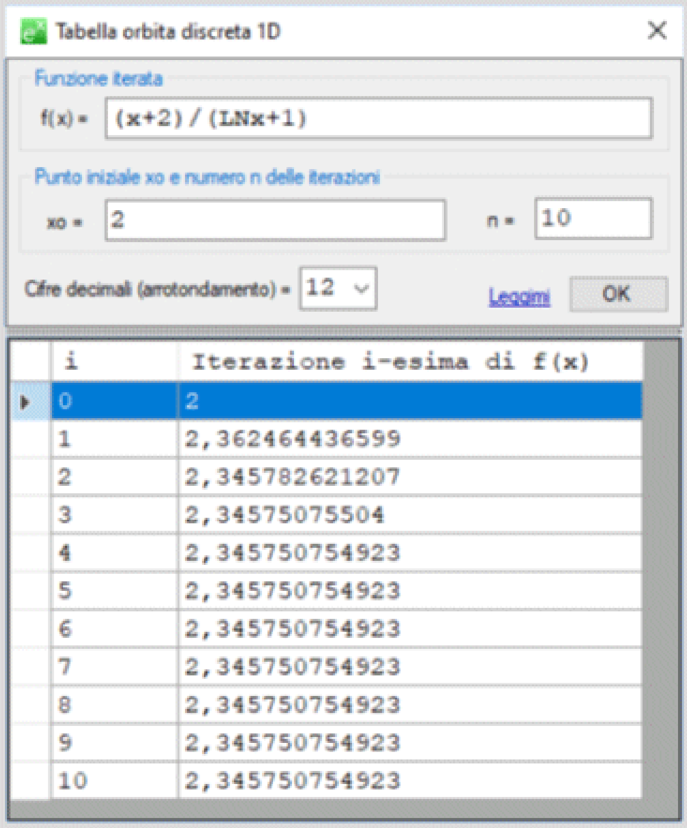
$$f(x) = x \ln x - 2$$

ci rendiamo conto che esiste un valore x_0 compreso tra 2 e 3 tale che $f(x_0)=0$.
Approssimare mediante il metodo di Newton tale soluzione x_0 dell'equazione $x\ln x-2=0$ (è un'equazione per la quale non abbiamo procedure risolutive che forniscano una soluzione simbolica).

Si tratta di iterare la funzione

$$g(x) = x - f(x)/f'(x)$$

con punto iniziale, ad esempio, 2. A fianco la tabella generata da EffeDiX. Notare la rapidità di convergenza.



i	Iterazione i-esima di f(x)
0	2
1	2,362464436599
2	2,345782621207
3	2,34575075504
4	2,345750754923
5	2,345750754923
6	2,345750754923
7	2,345750754923
8	2,345750754923
9	2,345750754923
10	2,345750754923

Esempio 2

Consideriamo una popolazione di conigli distribuita su un certo territorio; per il momento i nostri conigli sono liberi di crescere e di moltiplicarsi senza minacce e senza limiti (non ci sono predatori e il cibo è abbondante). Qual è il modello matematico che rappresenta questa situazione? Supponiamo che il numero *x* di conigli si incrementi in ogni unità di tempo (ad esempio in ogni mese) di una percentuale pari ad A=10%. Sia $x_0=100$ il numero iniziale dei conigli. E' facile determinare un modello discreto per l'evoluzione del sistema; indicando con x_1 il numero di conigli dopo un mese, con x_2 dopo due mesi e così via, si ha:

$x_0=100$

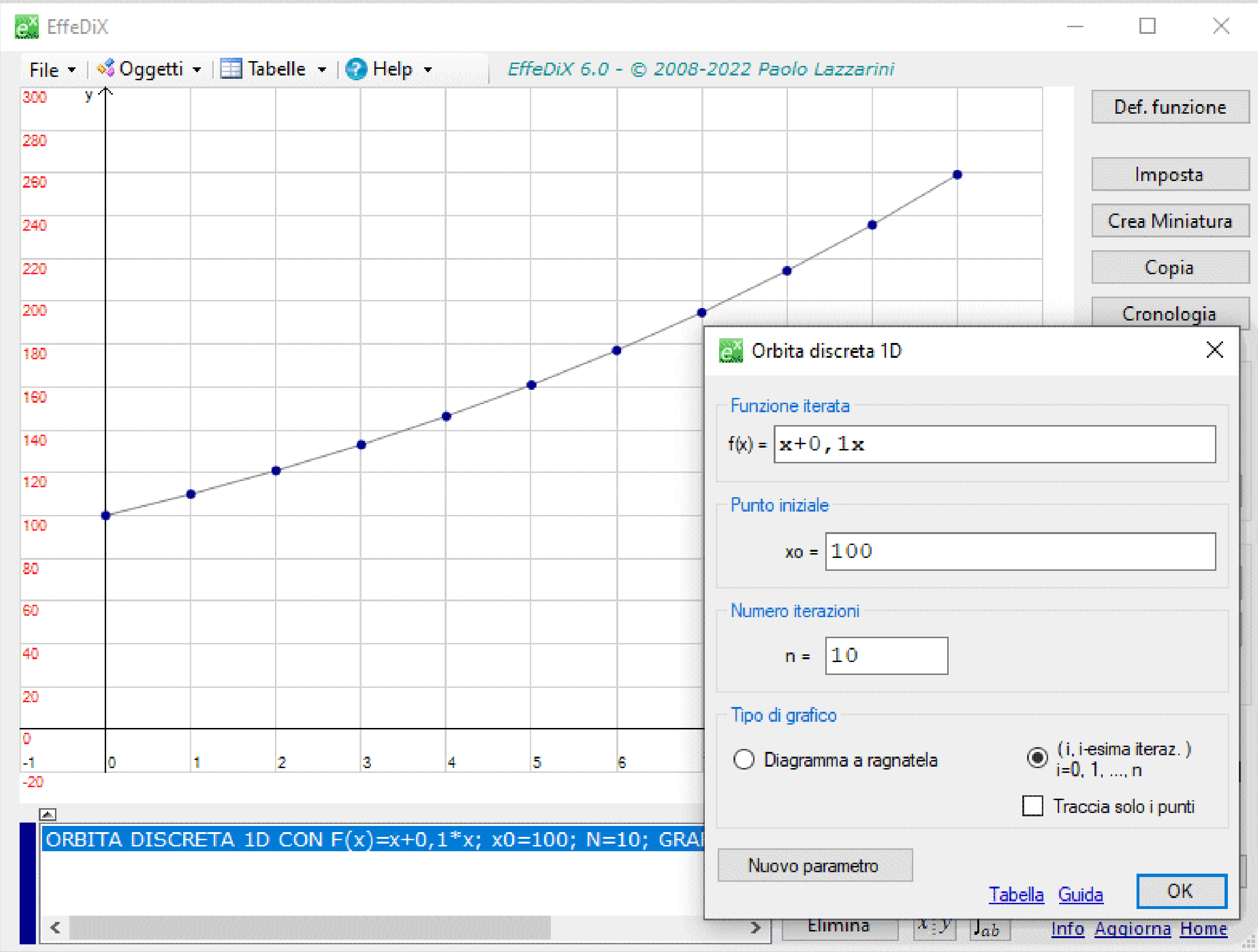
$x_1= x_0 + 0{,}1x_0 = 1{,}1x_0$

$x_2= x_1 + 0{,}1x_1 = 1{,}1x_1 = 1{,}1^2x_0$

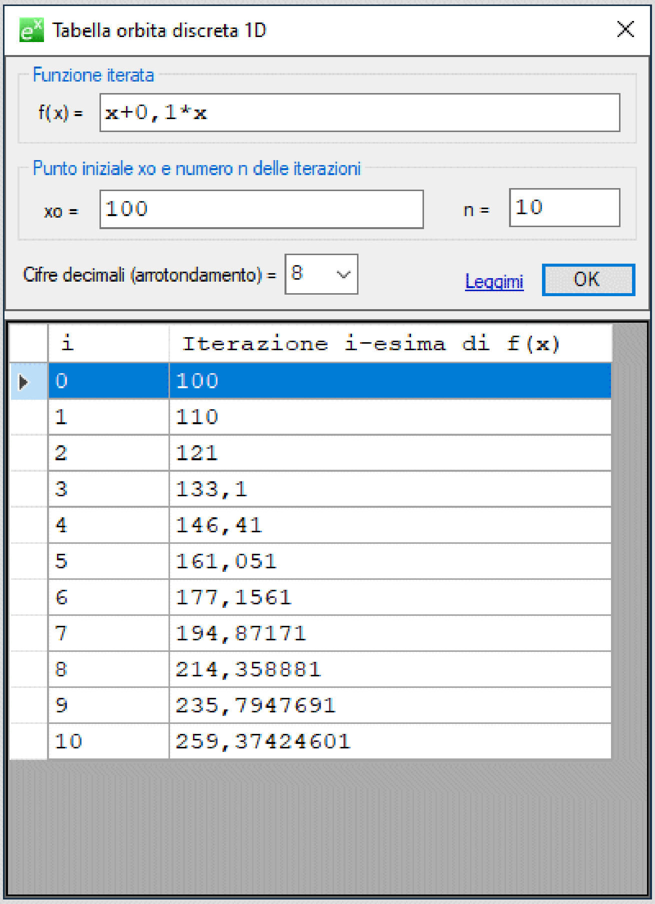
....

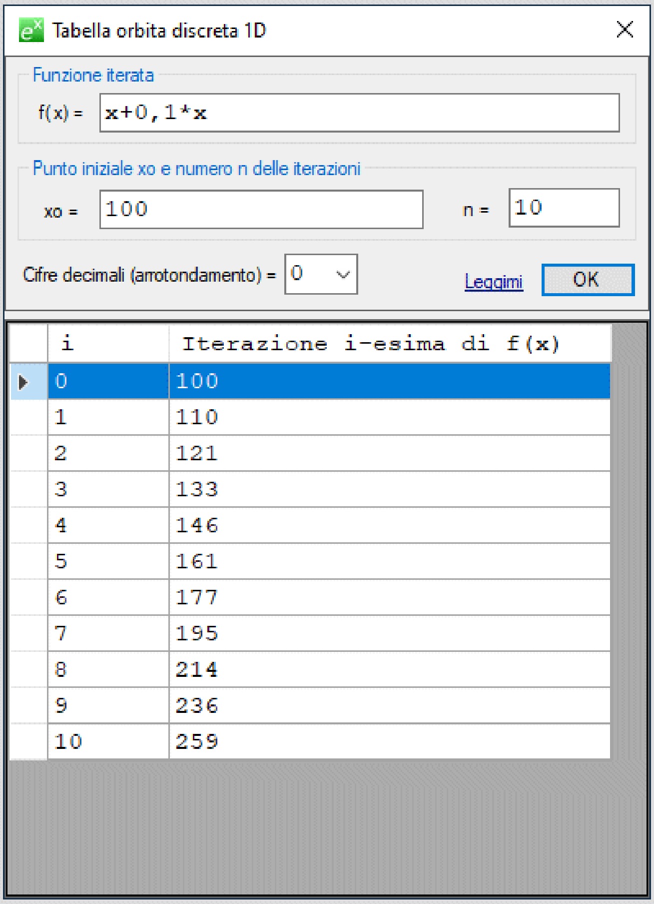
$x_n = x_{n-1} + 0{,}1x_{n-1} = x_0 1{,}1^n$

Il modello di crescita è quindi la crescita esponenziale cioè del tipo $x_n=x_0k^n$ (nel nostro caso k=1,1). La figura seguente mostra il grafico dei primi 10 valori dell'orbita (senza contare x_0). L'opzione di EffeDiX da utilizzare è *Orbita discreta 1D*, tipo di grafico *i-esima iterazione*. La funzione da iterare è f(x)=x+0,1x=1,1x.



In figura seguente trovate la relativa tabella generata facendo clic sull'opzione *Tabella* che vedete in blu nella finestra di impostazione della figura precedente; la tabella a destra è stata ottenuta impostando l'arrotondamento all'intero.





In conclusione: abbiamo determinato un modello evolutivo per il sistema dinamico costituito da una popolazione di conigli. Il modello esponenziale conduce però ad una crescita del numero dei conigli che diviene via via più rapida e **non è compatibile** con un sistema biologico reale. Una crescita esponenziale trova ben presto dei limiti di sviluppo dovuti alla mancanza di cibo o di spazio. Solo in una fase iniziale un sistema biologico può evolversi secondo un modello esponenziale. Dobbiamo quindi trovare dei modelli matematici che tengano conto di risorse limitate ed eventualmente dell'interazione di più specie in competizione.

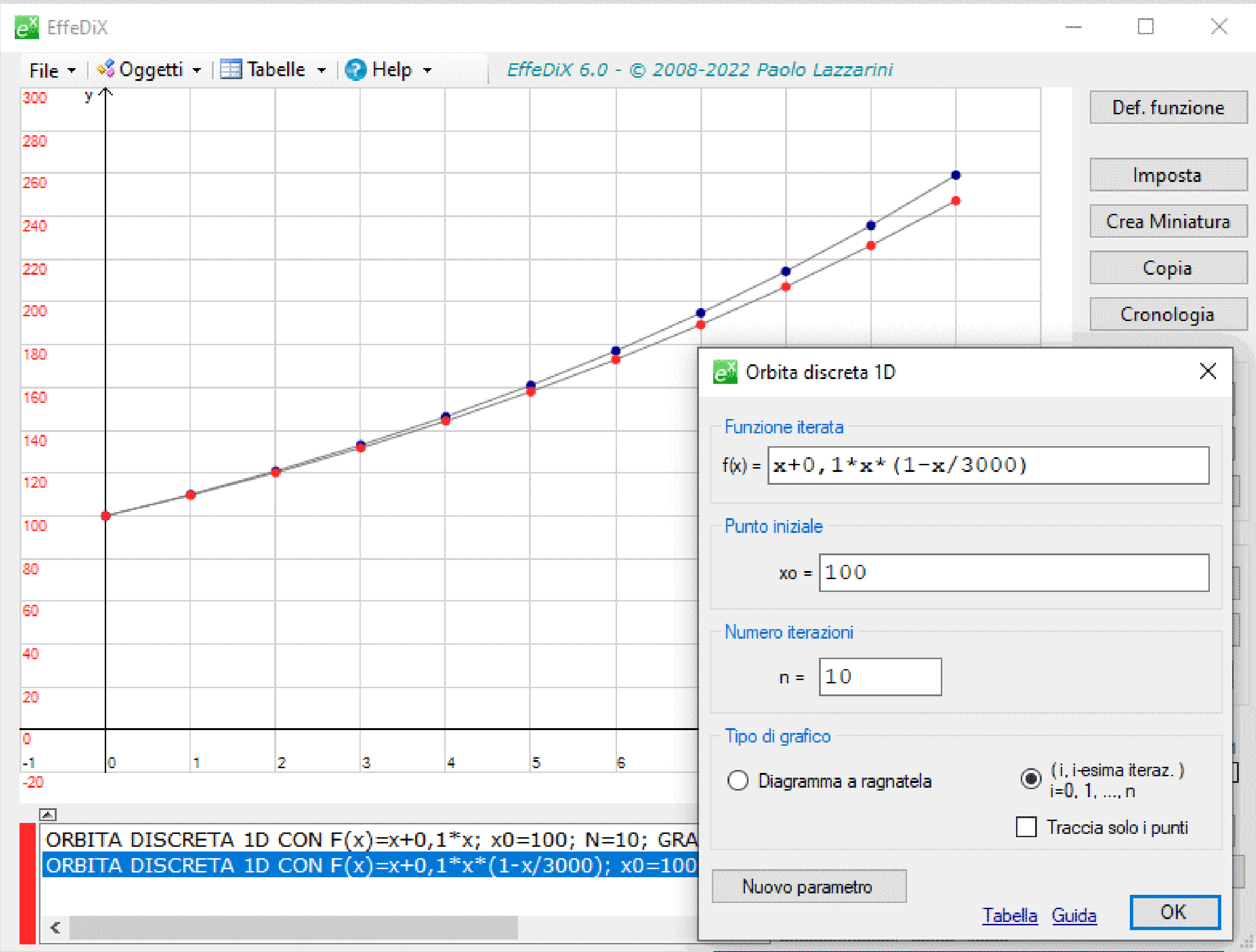
Esempio 3

Come si è detto nell'esempio 2, una popolazione cresce esponenzialmente per un primo breve periodo per poi rallentare la sua crescita tendendo alla massima capacità dell'ambiente. Dobbiamo modificare il nostro modello matematico rispetto a quello di una crescita puramente esponenziale. Riferiamoci alla stessa popolazione di conigli dell'esempio precedente; un modello ragionevole (verificabile sperimentalmente) è il modello logistico

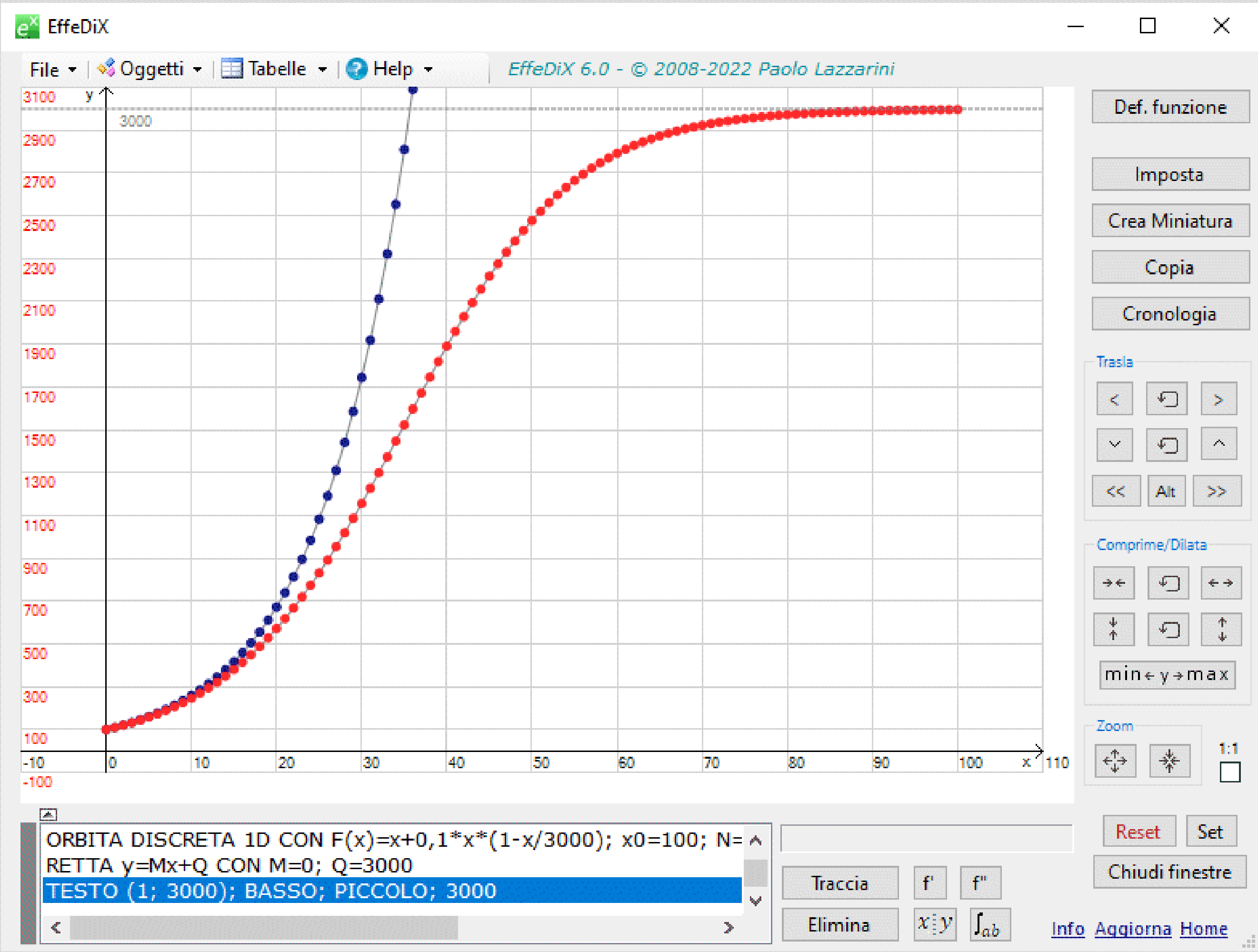
$$x_n \; = \; x_{n-1} \; + A x_{n-1}\left(1 - \frac{x_{n-1}}{M}\right)$$

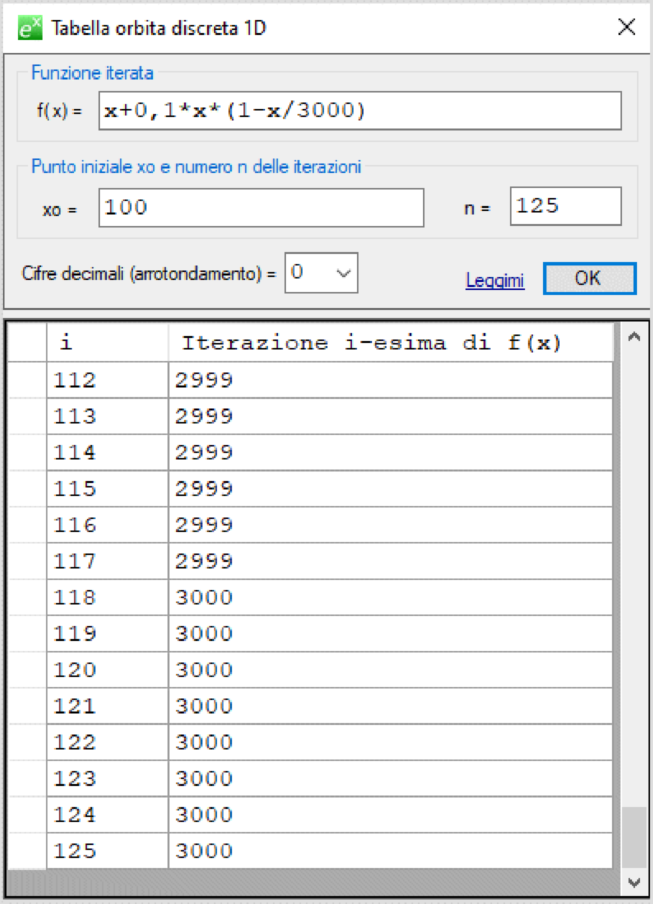
dove M è una costante che esprime la popolazione massima possibile (nel nostro caso M sarà il massimo numero possibile di conigli). Ragioniamo sul fattore $\left(1 - \frac{x_{n-1}}{M}\right)$ che non compariva nella successione esponenziale. Quando il valore x_{n-1} è piccolo rispetto ad M, il rapporto $\frac{x_{n-1}}{M}$ è prossimo a zero e dunque il nostro fattore è prossimo a 1; ne segue che la successione logistica differisce di poco da quella esponenziale. Ad esempio se fosse x_{n-1}=100 ed M=3000 si avrebbe $(1-\frac{x_{n-1}}{M}) \cong 0{,}97$. Ma al crescere di x_{n-1} (rispetto ad M) il nostro fattore determina un rallentamento via via più marcato della crescita. Quando x_{n-1} è minore di M ma prossimo ad M il rapporto $\frac{x_{n-1}}{M}$ è prossimo ad 1 e dunque il nostro fattore è prossimo a zero; ne segue che la successione logistica tende alla successione costante xn = xn-1.

E' il momento di fare delle verifiche con EffeDiX, ponendo, ad esempio, M=3000. Nella figura seguente vedete i due grafici relativi alla successione logistica (in rosso) e alla successione esponenziale (in blu): in una prima fase i valori x_n calcolati col modello logistico non differiscono di molto da quelli calcolati col modello esponenziale.

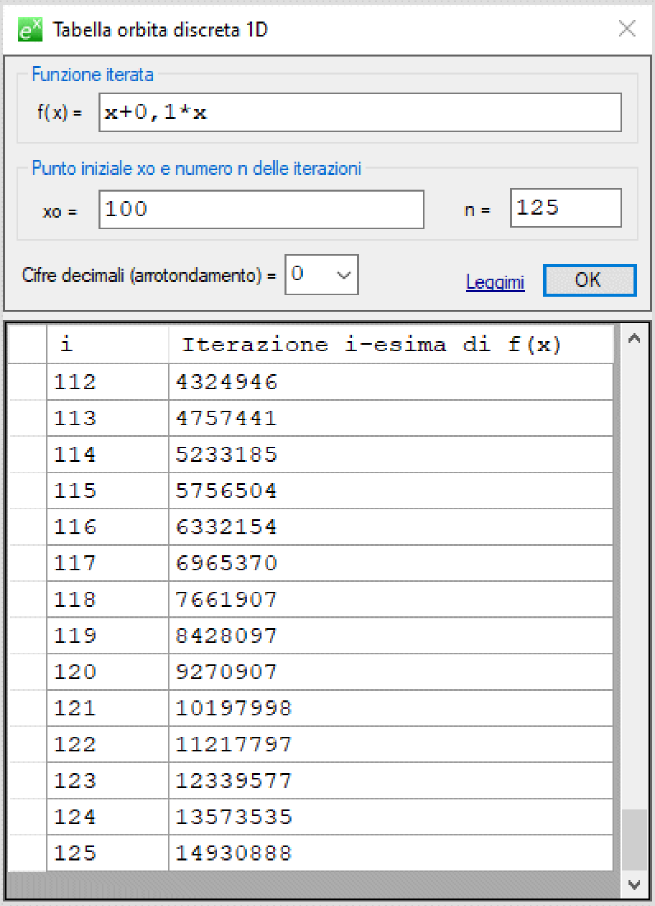


Ma al crescere di n … Abbiamo la conferma che la successione x_n, dopo una prima fase "quasi" esponenziale, tende poi a stabilizzarsi attorno al valore M=3000. Nella figura seguente: in rosso la successione logistica, in blu quella esponenziale (ci sono anche le relative tabelle).



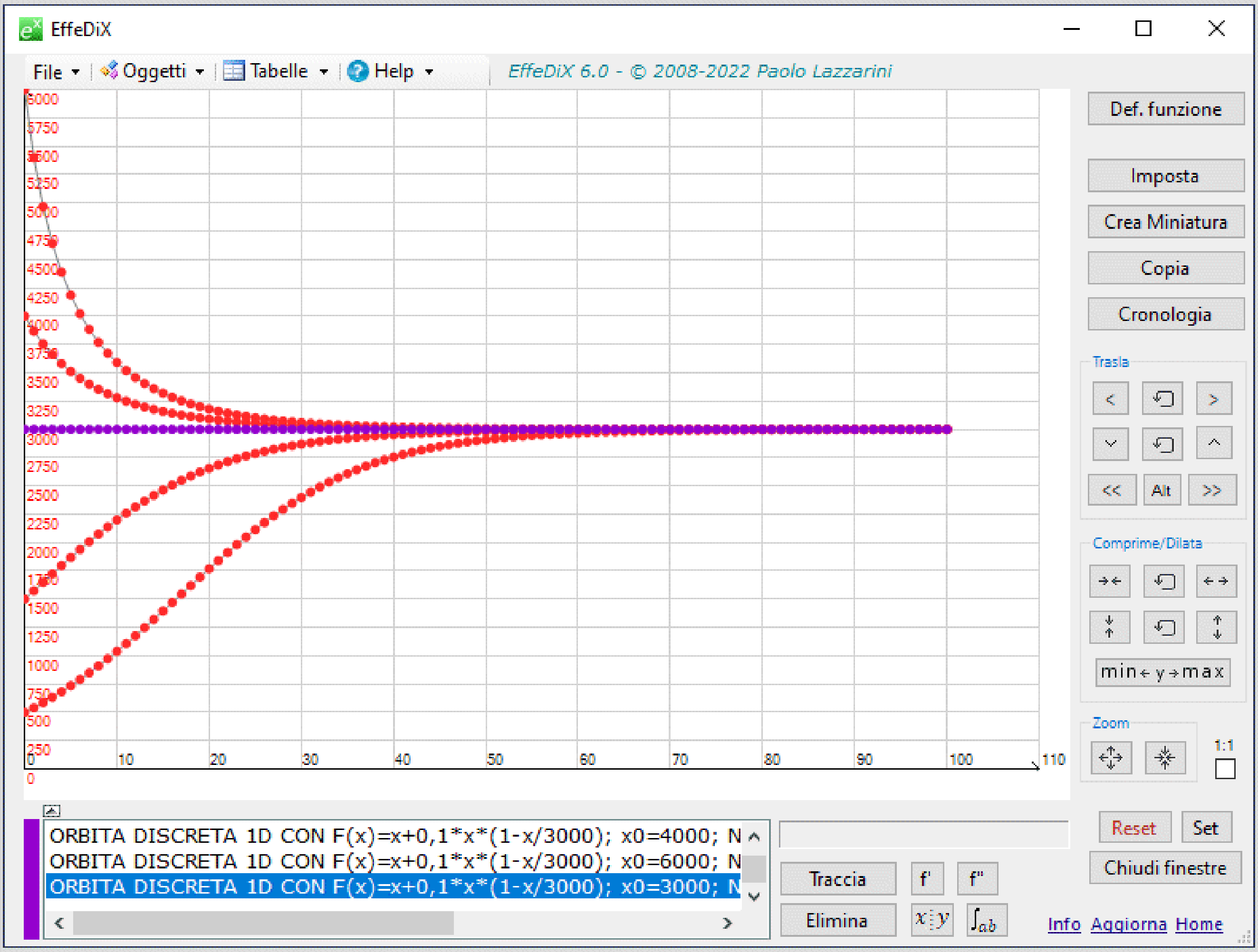


i	Iterazione i-esima di f(x)
112	2999
113	2999
114	2999
115	2999
116	2999
117	2999
118	3000
119	3000
120	3000
121	3000
122	3000
123	3000
124	3000
125	3000



i	Iterazione i-esima di f(x)
112	4324946
113	4757441
114	5233185
115	5756504
116	6332154
117	6965370
118	7661907
119	8428097
120	9270907
121	10197998
122	11217797
123	12339577
124	13573535
125	14930888

Provando a fare altri esperimenti, cambiando il valore iniziale x_0, ci si può rendere conto che **qualsiasi** sia il valore iniziale per la nostra successione di tipo logistico, si ha sempre convergenza al valore 3000 (anche se il valore iniziale è maggiore di 3000, in questo caso la successione sarà decrescente). Se il valore iniziale è proprio 3000 la successione è costante; ciò si verifica perché x_0=3000 è un **punto fisso** per la funzione f(x) che viene iterata, cioè si ha $f(x_0)=x_0$, e rappresenta uno stato di equilibrio del sistema dinamico. Ed è proprio questo stato di equilibrio ad "attrarre" tutte le possibili orbite. Nel nostro caso x_0 è un **punto fisso attrattore**.



E' infine interessante osservare che nel caso della successione logistica non è possibile esprimere il termine n-esimo della successione mediante una formula chiusa come si era fatto per la successione esponenziale (in quel caso la formula era $x_n=x_0k^n$). L'unico modo per conoscere il valore n-esimo è calcolare tutti valori precedenti, proprio come fa EffeDiX.

Vedi anche:

orbita discreta 2D

diagramma delle orbite (al variare di un parametro r)

diagramma delle orbite (al variare del punto iniziale)