

Orbita discreta 2D

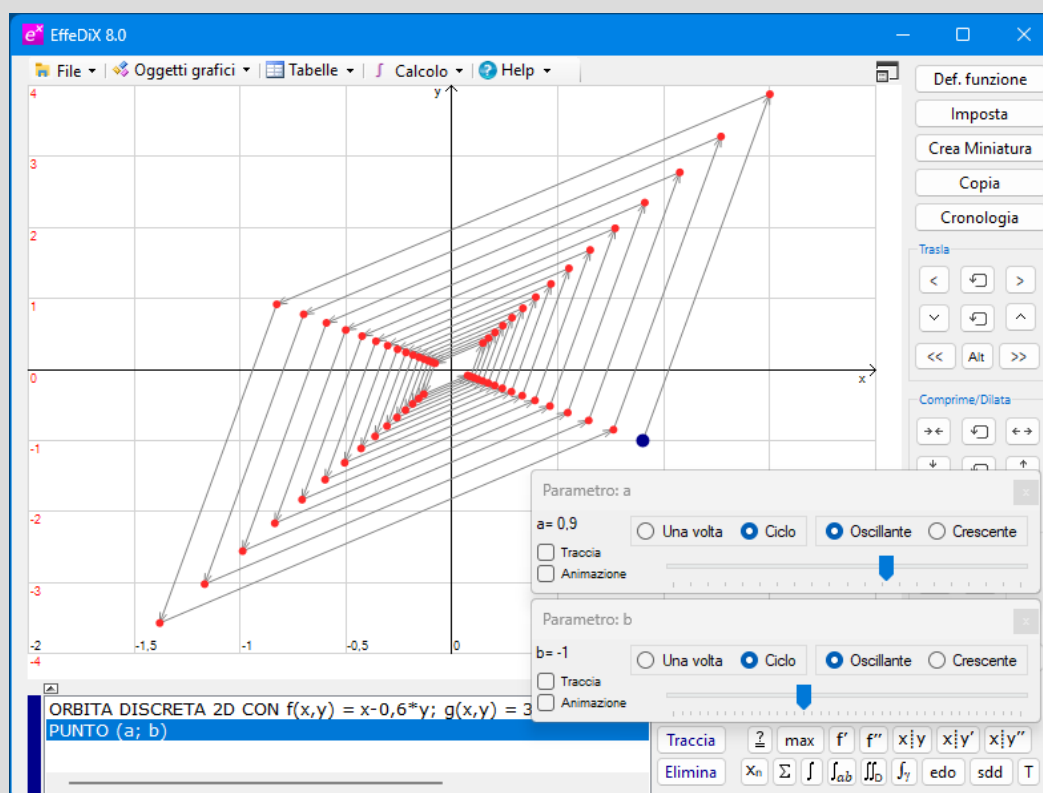
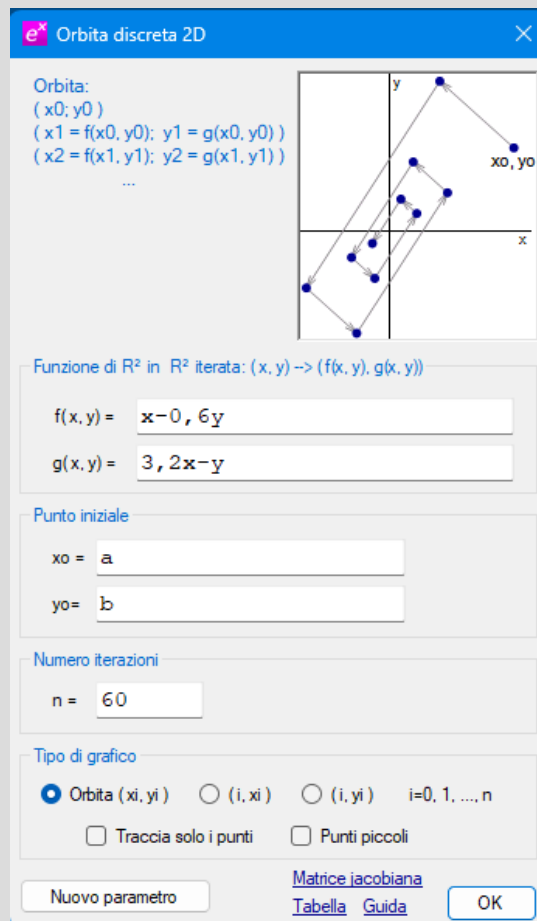
EffeDiX fornisce una serie di strumenti grafici e tabelle numeriche per studiare sistemi dinamici discreti sia a dimensione uno sia a dimensione due.

Facendo clic sull'opzione *Orbita discreta 2D* si apre la finestra di impostazione che vedete nella figura a fianco: qui, ad esempio, la funzione di R^2 in R^2 che viene iterata manda il punto $(x; y)$ nel punto $(x-0,6y; 3,2x-y)$, il punto iniziale è il punto $(a; b)$, dunque le coordinate del punto sono parametriche, e il numero di iterazioni è 60. Si è scelto inoltre, come tipo di grafico, l'**orbita** del punto. Tenete presente che l'orbita è costituita dai punti

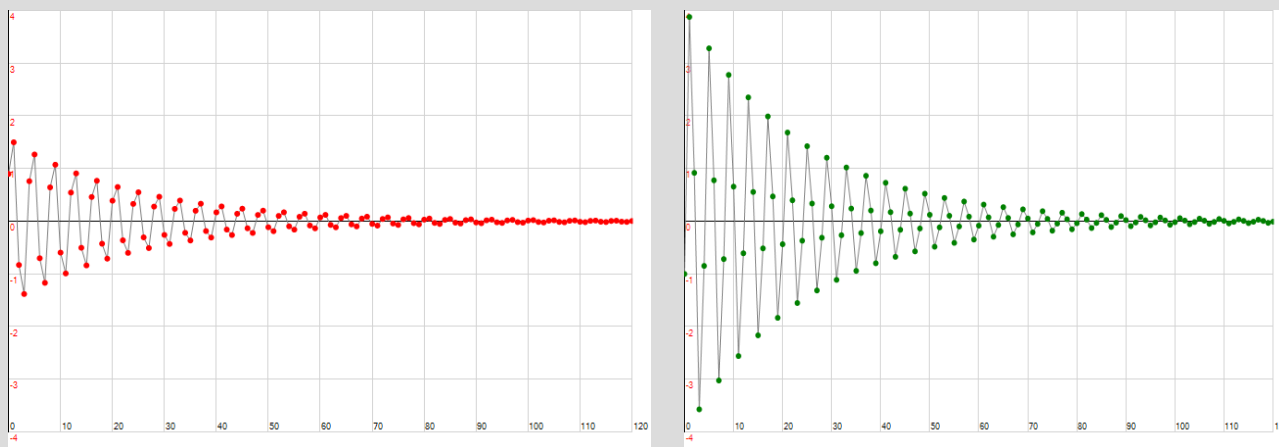
$x_0,$	y_0
$x_1 = f(x_0, y_0),$	$y_1 = g(x_0, y_0)$
$x_2 = f(x_1, y_1),$	$y_2 = g(x_1, y_1)$
$x_3 = f(x_2, y_2),$	$y_3 = g(x_2, y_2)$
...	...
$x_n = f(x_{n-1}, y_{n-1}),$	$y_n = g(x_{n-1}, y_{n-1})$

(nel nostro caso $f(x, y) = x - 0,6y$ e $g(x, y) = 3,2x - y$).

Nella figura seguente vedete l'orbita relativa al punto iniziale $(0,9; -1)$ (punto blu in figura, pilotabile mediante le due slider bar). Come si vede l'orbita converge, seppur lentamente, verso l'origine.



Le due figure seguenti mostrano rispettivamente i grafici dell'ascissa x_i in funzione di i e dell'ordinata y_i in funzione di i dei punti (x_i, y_i) dell'orbita.



Per ottenere questi grafici utilizzeremo la stessa finestra di impostazione e selezioneremo il *Tipo di grafico* opportuno (mediante i pulsanti radio) cioè faremo clic sul pulsante (i, x_i) per il primo grafico e sul pulsante (i, y_i) per il secondo. Qui, inoltre, si è impostato $n=120$ anziché $n=60$.

Nel nostro caso la funzione F di R^2 in R^2 che viene iterata è **lineare** e manda il punto

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

nel punto AX dove A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0,6 \\ 3,2 & -1 \end{pmatrix}$$

Gli **autovalori**¹ della matrice A

$$\lambda_1 \approx -0,9591663i \text{ e } \lambda_2 \approx 0,9591663i$$

sono complessi coniugati e hanno modulo minore di 1: $|\lambda_1|=|\lambda_2| \approx 0,959$. Ne segue, per una nota proprietà delle mappe lineari¹, che l'origine, unico punto fisso di F , è un punto **attrattore** (globale). Qualunque sia il punto iniziale l'orbita viene "attratta" verso l'origine. La lenta convergenza dell'orbita verso l'origine si spiega osservando che il modulo degli autovalori, benché minore di 1, è di poco minore di 1. Possiamo verificare graficamente questa caratteristica dell'origine modificando le coordinate del punto iniziale mediante le due slider bar.

¹ Per trovare gli autovalori di una matrice 2×2 usa l'opzione *Calcolo - Autovalori, autovettori, autospazi*. Per una trattazione più articolata delle mappe iterative lineari vedi la voce della guida *Autovalori, autovettori, autospazi di una matrice 2×2 . Sistemi lineari di equazioni differenziali e mappe iterative lineari*.

Esempio 1

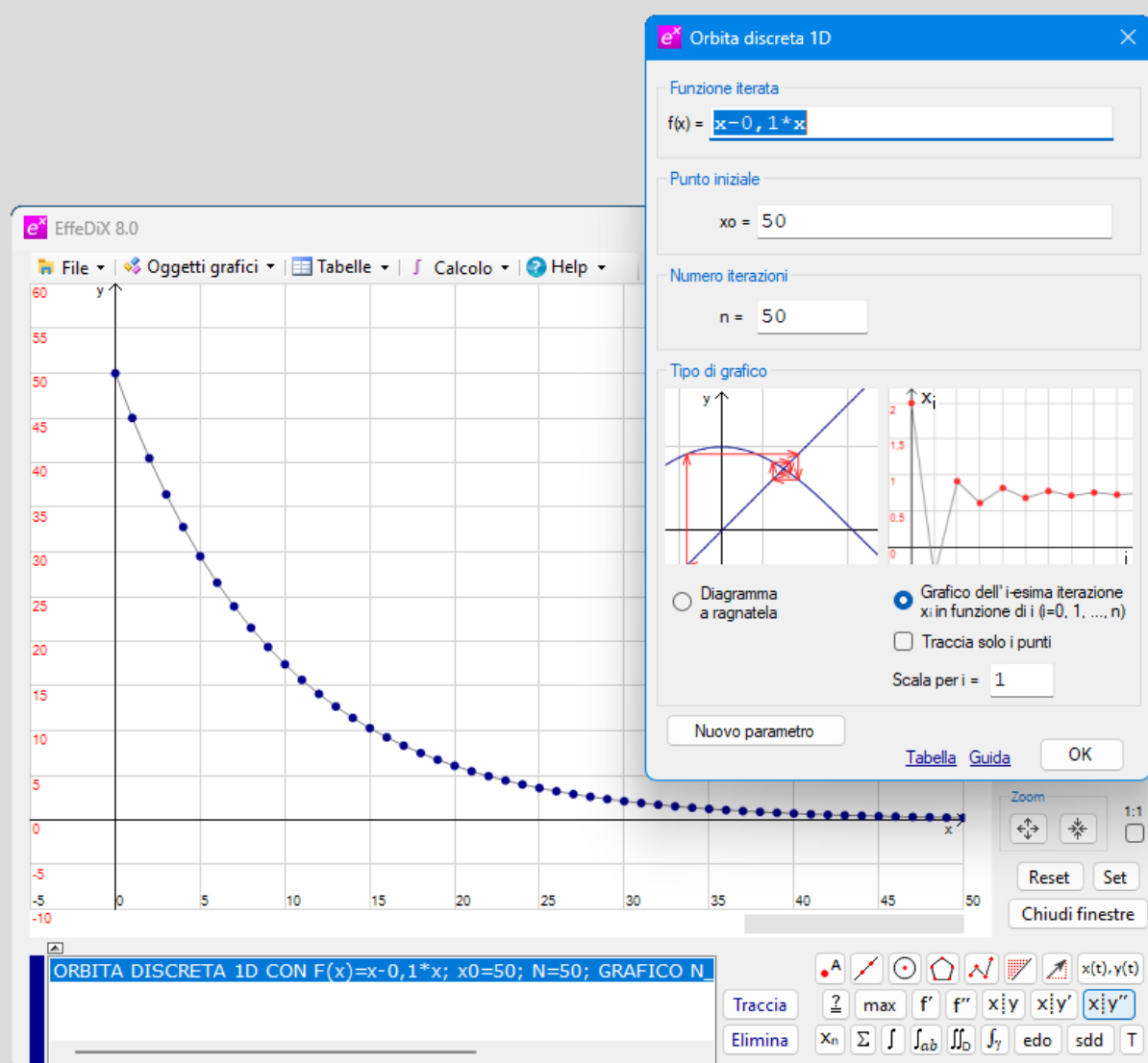
Torniamo ad occuparci di un modello matematico discreto che rappresenta un sistema biologico (vedere anche gli esempi 2 e 3 della guida all'opzione *Orbita discreta 1D* a cui faremo riferimento). Consideriamo un ecosistema particolarmente semplice in cui interagiscono due specie in competizione tra loro: volpi e conigli oppure pesci e pescecani, afidi e cimici, batteri e amebe, ecc. La situazione che studieremo è costituita da una prima specie, le prede (nel nostro caso conigli), che supponiamo disponga di nutrimento abbondante, e una seconda specie, i predatori (nel nostro caso volpi), che si nutra esclusivamente delle prede. Indicheremo rispettivamente con x_0 e y_0 il numero iniziale di conigli e di volpi e con x_n e y_n il numero di conigli e volpi al tempo n (ad esempio a n mesi dalla situazione iniziale). Per il momento assumiamo che volpi e conigli siano separati da una rete che impedisce il contatto tra le due specie; allora per i conigli vale il solito modello logistico (vedi esempio 2 già citato)

$$x_n = x_{n-1} + Ax_{n-1} \left(1 - \frac{x_{n-1}}{M}\right)$$

mentre le volpi, in assenza di cibo (cioè di prede), tenderanno rapidamente all'estinzione, con una percentuale di decrescita per unità di tempo pari, diciamo, a $B = 10\%$

$$y_n = y_{n-1} - By_{n-1}$$

(modello esponenziale già studiato nel già citato esempio 1). In figura seguente l'andamento di una popolazione di 50 volpi in assenza di cibo.



Togliamo la rete di separazione tra conigli e volpi. Come dovremo modificare le due successioni precedenti? E' ragionevole supporre che il numero dei conigli predati sia proporzionale sia al numero attuale di conigli (più conigli ci sono in giro, più è facile per le volpi predarli), sia al numero attuale di volpi (più volpi ci sono, più probabile che un coniglio sia predato); allora la prima successione si trasforma così

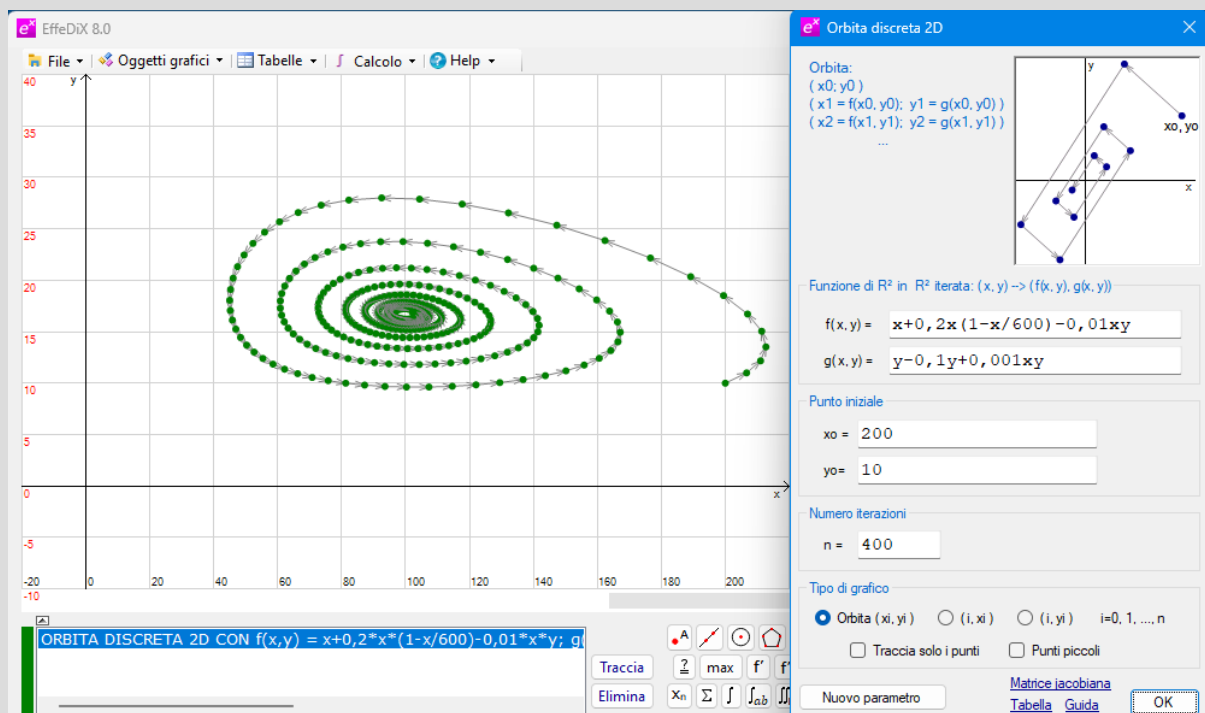
$$x_n = x_{n-1} + A_1 x_{n-1} \left(1 - \frac{x_{n-1}}{M} \right) - A_2 x_{n-1} y_{n-1}$$

Come si vede c'è un nuovo termine che viene sottratto e che rappresenta il numero di conigli predati. La costante A_1 corrisponde alla vecchia costante A , mentre la costante A_2 è un coefficiente di "predazione" che deve essere determinato sperimentalmente. Se, ad esempio, ad un certo momento ci sono 800 conigli e 20 volpi e, dopo una unità di tempo, i conigli predati sono 160, si ha $160 = A_2 \cdot 800 \cdot 20$ e quindi $A_2 = 0,01$.

Con un ragionamento analogo si può ipotizzare che il numero delle volpi si incrementi nell'unità di tempo di un numero proporzionale al numero di conigli predati cioè proporzionale a $x_{n-1} y_{n-1}$; quindi la seconda successione si trasforma così

$$y_n = y_{n-1} - B_1 y_{n-1} + B_2 x_{n-1} y_{n-1}$$

Qui la costante B_1 corrisponde alla vecchia costante B e B_2 è una costante da determinare sperimentalmente (si tratta del coefficiente di crescita delle volpi che, grazie alla caccia, possono nutrirsi e generare dei piccoli). Notare che le due successioni sono piuttosto complicate **perché legate l'una all'altra** (non posso determinare x_n senza conoscere y_n e viceversa) e sono **non lineari**. Non siamo in grado di determinare delle formule chiuse per x_n e y_n ma possiamo determinare le due successioni iterativamente, conoscendo le condizioni iniziali. Nella figura seguente è stata utilizzata l'opzione *Orbita discreta 2D*, tipo di grafico *Orbita*, per rappresentare l'evoluzione nel tempo del sistema conigli-volpi; i parametri impostati sono: $x_0=200$, $y_0=10$, $M=600$, $A_1=0,2$, $A_2=0,01$, $B_1=0,1$, $B_2=0,001$.



Ogni punto dell'orbita rappresenta uno stato (x, y) del sistema a partire dallo stato iniziale $(200, 10)$ in cui sono presenti 200 conigli e 10 volpi (il flusso delle frecce indica l'ordine temporale degli stati). E' evidente la convergenza dell'orbita, dopo una serie di avvistamenti, verso un punto (uno stato) che valuteremo con maggior precisione generando una tabella (opzione *Tabella* che si vede in blu nella finestra di impostazione della figura precedente).

e^x Tabella orbita discreta 2D

Funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ iterata: $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

$f(x, y) = x + 0,2 * x * (1 - x / 600) - 0,01 * x * y$

$g(x, y) = y - 0,1 * y + 0,001 * x * y$

Punto iniziale

xo = yo =

Numero iterazioni

n =

Cifre decimali (arrotondamento) =

[Leggimi](#)

i	x(i)	y(i)
0	200	10
1	207	11
2	211	12
3	213	14
4	211	15
5	207	17
6	199	19
7	189	20
8	177	22
9	162	24
10	147	25
11	132	27
12	118	27
13	104	28

e^x Tabella orbita discreta 2D

Funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ iterata: $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$

$f(x, y) = x + 0,2 * x * (1 - x / 600) - 0,01 * x * y$

$g(x, y) = y - 0,1 * y + 0,001 * x * y$

Punto iniziale

xo = yo =

Numero iterazioni

n =

Cifre decimali (arrotondamento) =

[Leggimi](#)

i	x(i)	y(i)
587	101	17
588	101	17
589	101	17
590	101	17
591	101	17
592	101	17
593	100	17
594	100	17
595	100	17
596	100	17
597	100	17
598	100	17
599	100	17
600	100	17

Assumendo che l'unità di tempo sia il mese, la quarta riga della tabella, ad esempio, mostra lo stato del sistema dopo 3 mesi, 213 conigli e 14 volpi; nel grafico precedente tale stato è rappresentato dal quarto punto a partire dallo stato iniziale, seguendo il flusso delle frecce.

Come si vede l'orbita converge a uno stato di equilibrio, il punto $(100, 17)$, 100 conigli e 17 volpi, arrotondando all'intero² i valori di x e y . Per determinare lo stato di equilibrio algebricamente, ragioniamo così. Affinché il sistema non subisca variazioni nel tempo deve essere $x_n = x_{n-1}$ e $y_n = y_{n-1}$ per un certo n e quindi devono essere verificate simultaneamente le due equazioni

$$\begin{aligned} 0,2 x_{n-1} \left(1 - \frac{x_{n-1}}{600} \right) - 0,01 x_{n-1} y_{n-1} &= 0 \\ -0,1 y_{n-1} + 0,001 x_{n-1} y_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

² I valori sono arrotondati nella tabella alla fine del calcolo di tutti i valori (ogni valore dipende da tutti i precedenti) ma durante il calcolo tutti i valori sono valutati con la massima precisione a 64 bit.

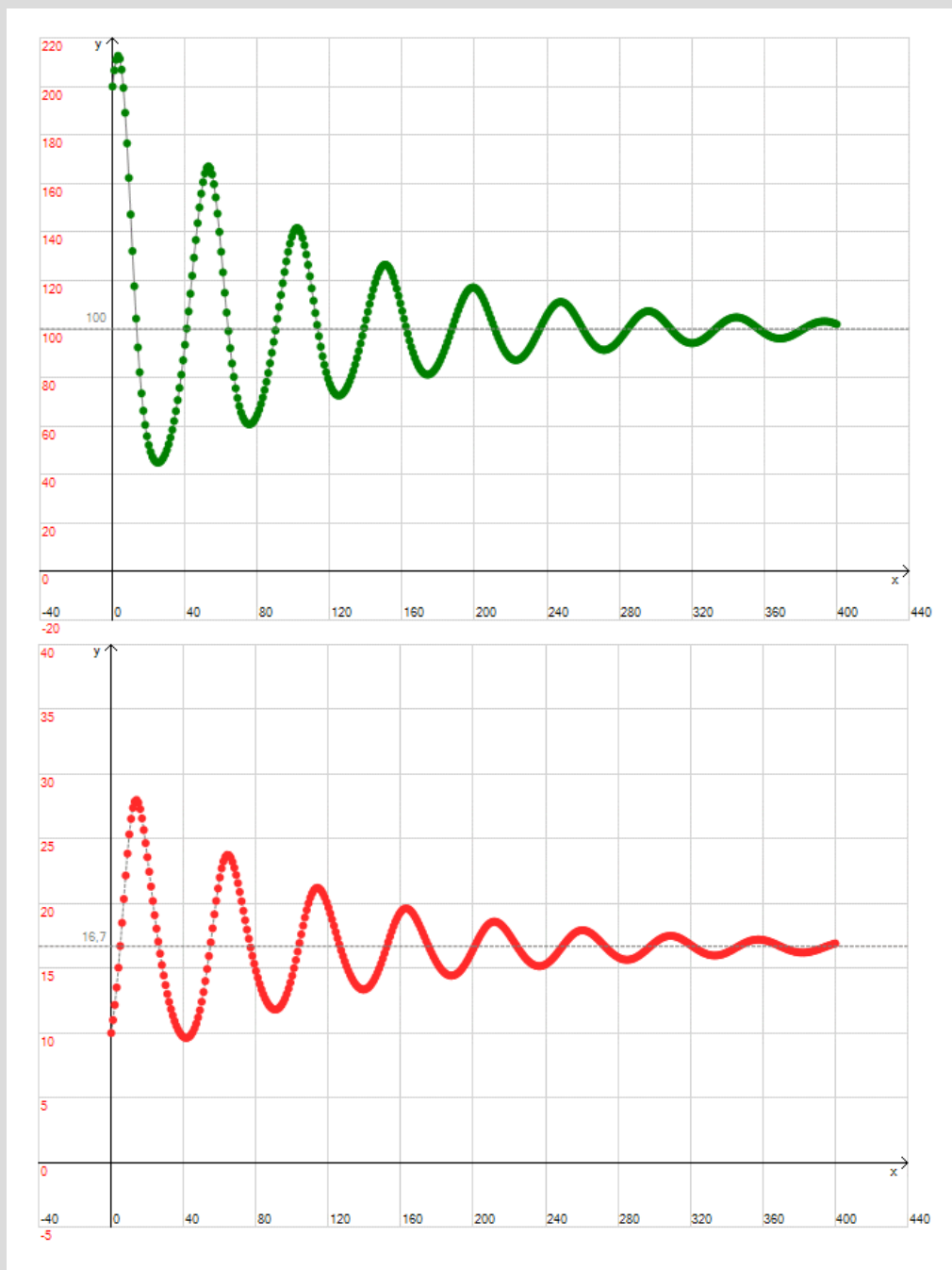
Indicando le incognite con x e y e raccogliendo, il sistema algebrico diventa

$$x(x+30y-600)=0$$

$$y(x-100)=0$$

Le tre soluzioni $(0; 0)$, $(100; 16,666\dots)$, $(600; 0)$ sono tre stati di equilibrio, tre **punti fissi**³, se il punto iniziale fosse uno di questi tre l'orbita sarebbe costantemente uguale al punto fisso.

Le due schermate seguenti sono state ottenute con le stesse impostazioni di prima ma selezionando come *Tipo di grafico* rispettivamente il grafico di x_i in funzione di i (numero di conigli in funzione del tempo) e il grafico di y_i in funzione di i (numero di volpi in funzione del tempo).



Osservate la sfasatura tra i due grafici che ha un chiaro significato in termini di ecosistema: al crescere del numero di volpi decresce il numero di conigli ma fino a un certo punto, quando i

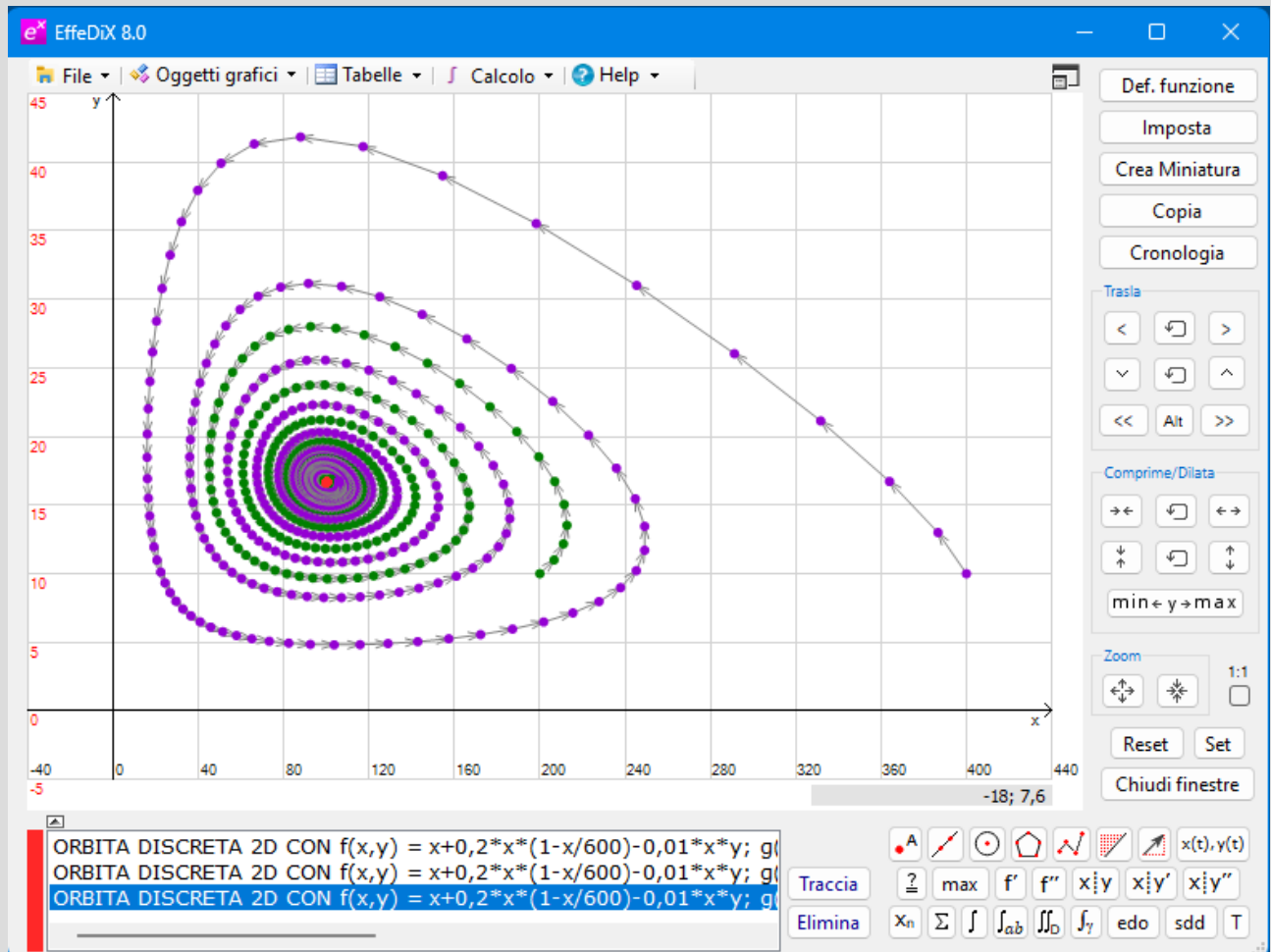
³ Un punto (x^*, y^*) è **fisso** per la funzione $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$ se si ha $f(x^*, y^*) = x^*$ e $g(x^*, y^*) = y^*$.

conigli scendono sotto una certa soglia cominciano a decrescere le volpi, per mancanza di cibo, e riprende la crescita dei conigli.

Esempio 2

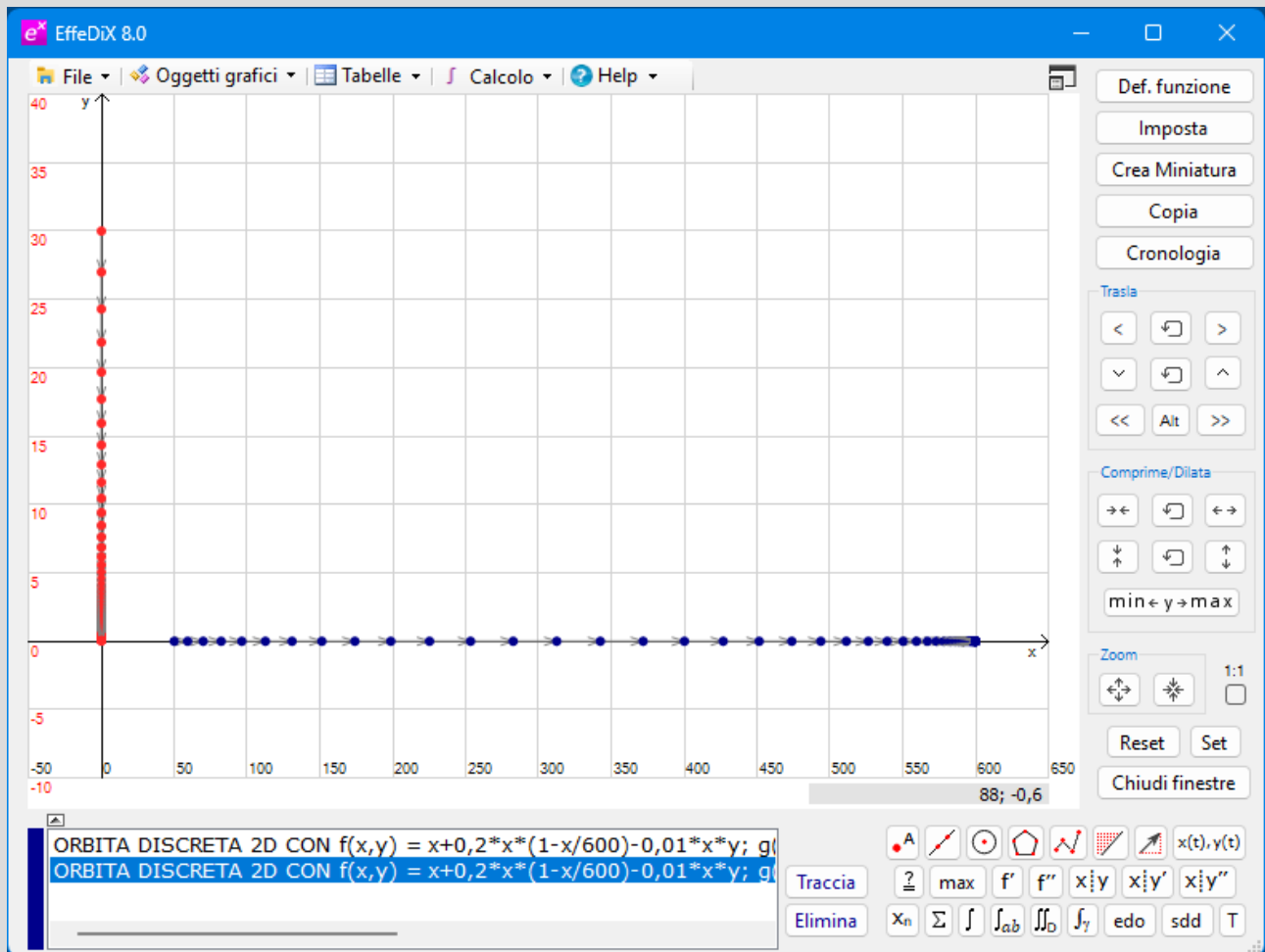
Riprendiamo la situazione dell'esempio precedente. Cosa succede se cambiamo il punto iniziale (x_0, y_0) tenendo ferme tutte le altre impostazioni? Qual è il ruolo dei tre punti fissi? Nella schermata seguente si vedono tre traiettorie: quella verde con solito punto iniziale $(200, 10)$, quella viola con punto iniziale $(400, 10)$ e quella rossa con punto iniziale nel punto fisso $(100, 16,666\dots)$, orbita stazionaria, ridotta ad un solo punto. In tutti e tre i casi le orbite convergono al punto fisso $(100, 16,666\dots)$.

Siamo di fronte a un fatto notevole: potete verificare che qualunque sia lo stato iniziale all'**interno del primo quadrante**, l'orbita del sistema viene "attratta" sempre dallo stesso punto fisso $(100, 16,666\dots)$; al variare dello stato iniziale le orbite sono diverse ma tutte, dopo un tempo che può variare, convergono verso lo stesso stato di equilibrio (potremmo dire che sono "asintoticamente" equivalenti). Diremo che il punto fisso $(100, 16,666\dots)$ è un **attrattore**.



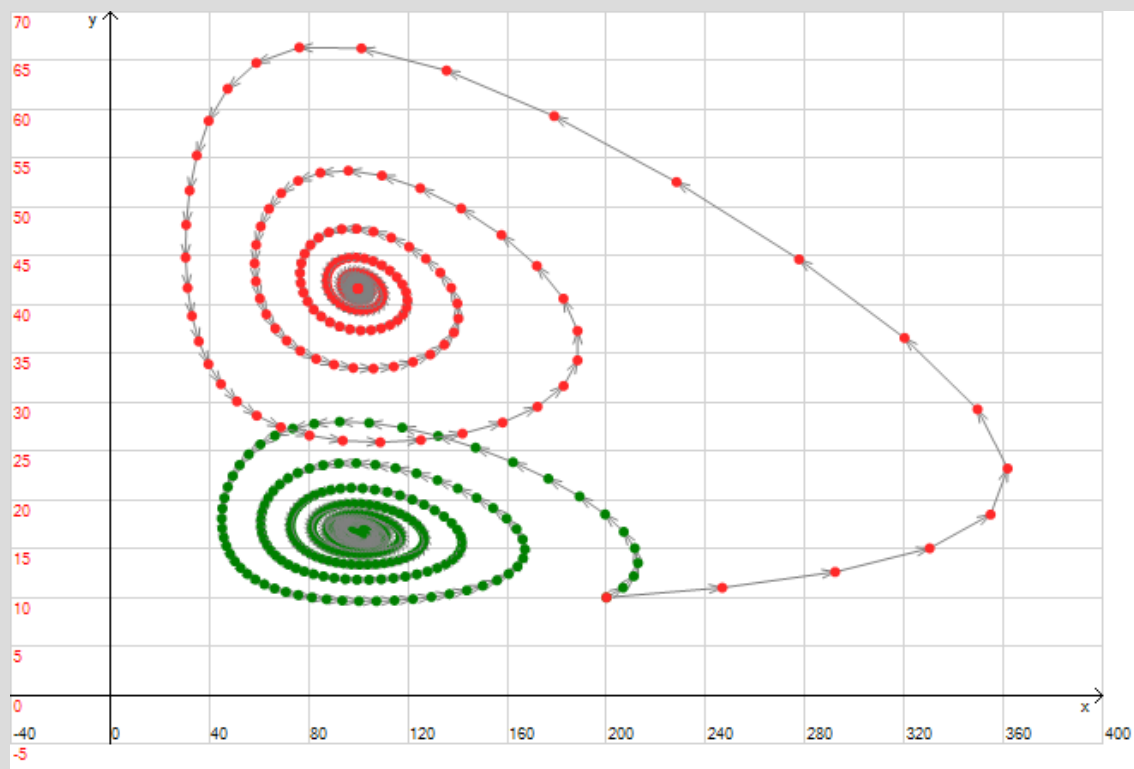
Nella schermata seguente vedete due orbite con punti iniziali sui semiassi positivi: la prima con punto iniziale $(0, 30)$, la seconda con punto iniziale $(50, 0)$. La prima converge al punto fisso $(0, 0)$ come ci aspettiamo perché le 30 volpi in assenza di cibo sono destinate all'estinzione; la seconda converge al punto fisso $(600, 0)$ perché i conigli in assenza di predatori crescono di

numero fino alla soglia massima che è stata impostata a $M=600$. In ogni caso le orbite con punti nel primo quadrante o sui semiassi positivi tendono all'equilibrio.



Esempio 3

Riprendiamo la situazione degli esempi 1 e 2. Cosa succede al nostro ecosistema se cambiamo i parametri A_1 , A_2 , B_1 , B_2 ? Le orbite rimangono sostanzialmente le stesse (asintoticamente) oppure si ottengono dinamiche di altro tipo? Facciamo qualche esperimento. Nella figura seguente vedi in rosso la solita orbita e in rosso l'orbita ottenuta impostando $A_1=0,5$ (aumentando quindi la percentuale di crescita dei conigli, mentre tutti gli altri parametri sono rimasti gli stessi). Il punto fisso attrattore è cambiato ma il sistema trova anche in questo caso uno stato di equilibrio. Notare che in una prima fase transitoria aumenta il numero dei conigli (come ci saremmo aspettati), dopo 5 mesi si arriva ad un numero di 362, ma all'equilibrio, il numero dei conigli è di nuovo 100 mentre è aumentato il numero di volpi (42 volpi). Il modello matematico ci fornisce informazioni che non sapremmo prevedere. Riflettete: 100 conigli sono ora in equilibrio con 42 volpi mentre nel modello precedente erano in equilibrio con 17 volpi; questo risultato non è contraddittorio perché ora la capacità riproduttiva dei conigli è notevolmente aumentata grazie al parametro A_1 .



Vedi anche:

[orbita discreta 1D](#)

[diagramma delle orbite \(al variare di un parametro \$r\$ \)](#)

[diagramma delle orbite \(al variare del punto iniziale\)](#)